ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

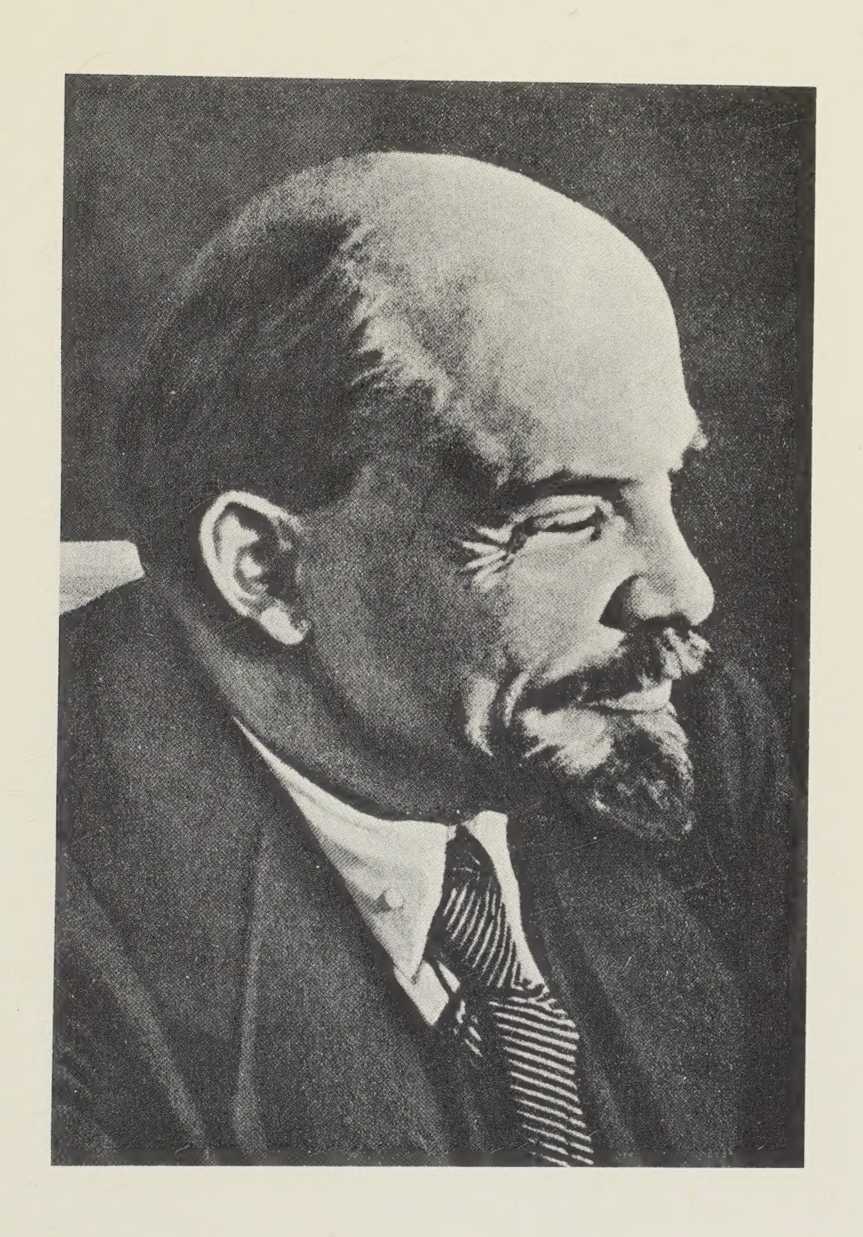
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

SÉRIE MATHÉMATIQUE

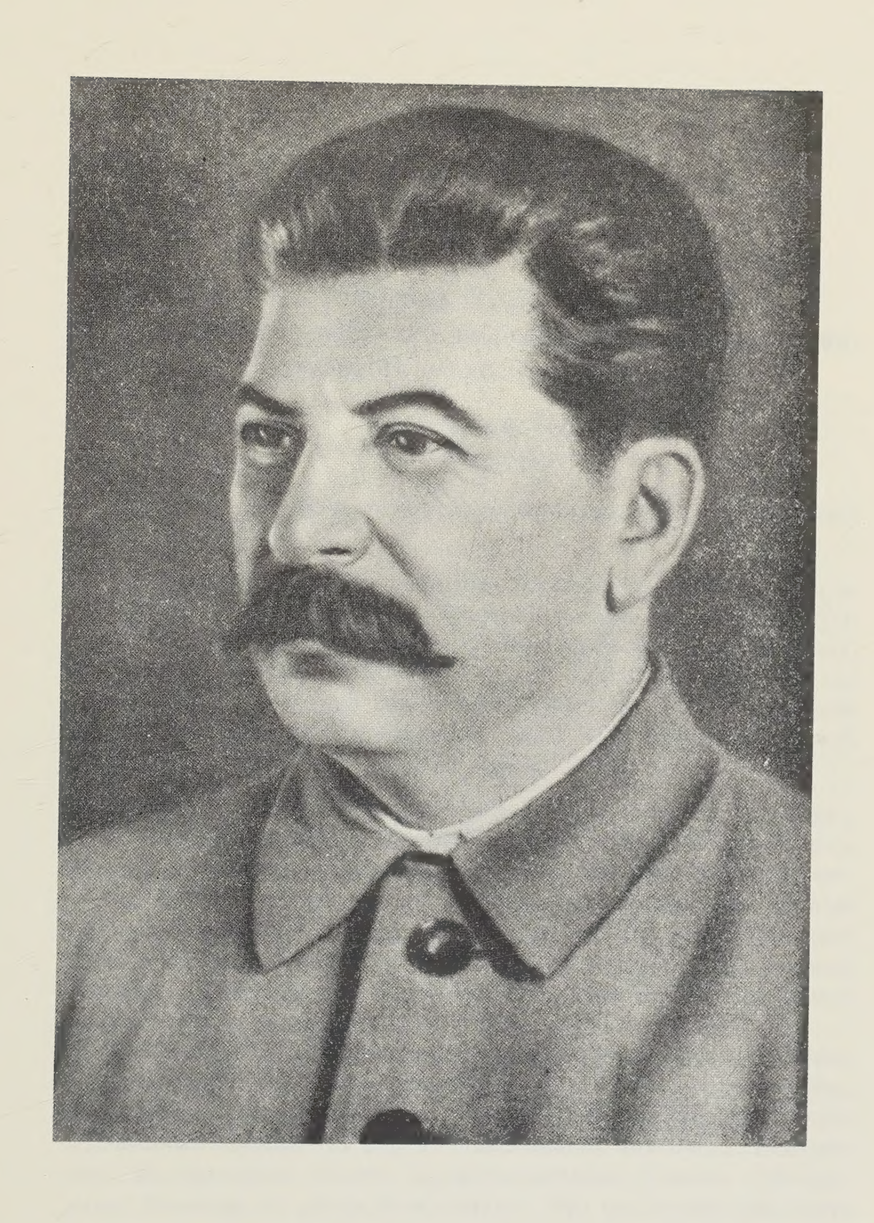
№ 4

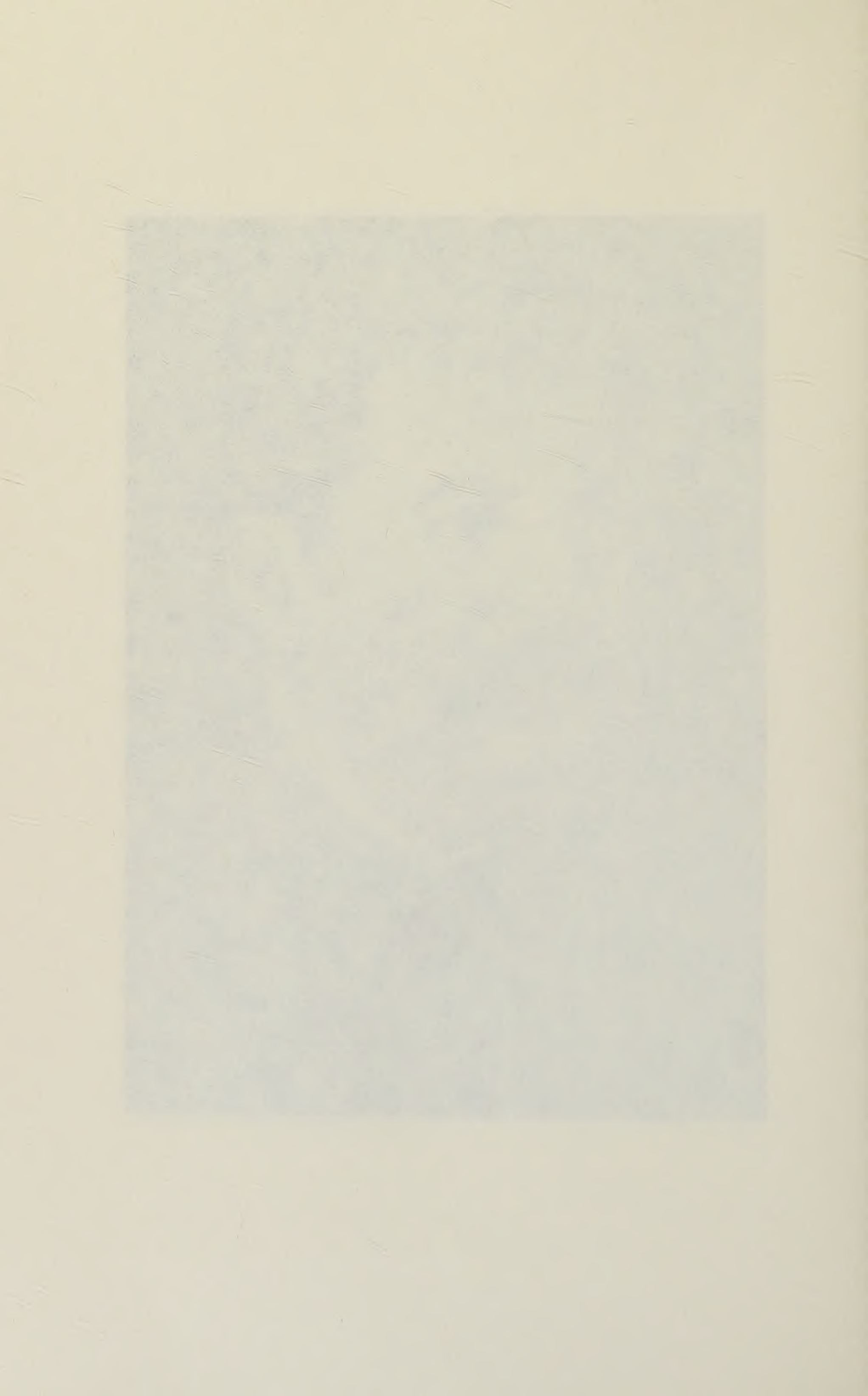
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1937









Речь товарища И. В. СТАЛИНА
на предвыборном собрании избирателей Сталинского избирательного округа гор. Москвы

11 декабря 1937 года
в Большом театре

Председательствующий. Слово предоставляется нашему кандидату товарищу Сталину.

Появление на трибуне товарища Сталина встречается избирателями бурей оваций, которая длится в течение нескольких минут. Весь зал Большого театра стоя приветствует товарища Сталина. Из зала непрерывно раздаются возгласы: «Да здравствует великий Сталин, ура!», «Творцу самой демократической в мире Советской Конституции товарищу Сталину, ура!», «Да здравствует вождь угнетенных всего мира, товарищ Сталин, ура!»

СТАЛИН. Товарищи, признаться я не имел намерения выступать. Но наш уважаемый Никита Сергеевич, можно сказать, силком притащил меня сюда, на собрание: скажи, говорит, хорошую речь. О чем сказать, какую именно речь? Все что нужно было сказать перед выборами уже сказано и пересказано в речах наших руководящих товарищей Калинина, Молотова, Ворошилова, Кагановича, Ежова и многих других ответственных товарищей. Что еще можно прибавить к этим речам?

Требуются, говорят, разъяснения по некоторым вопросам избирательной кампании. Какие разъяснения, по каким вопросам? Все, что нужно было разъяснить, уже разъяснено и переразъяснено в известных обращениях партии большевиков, комсомола, Всесоюзного Центрального Совета Профессиональных Союзов, Осоавиахима, Комитета по делам физкультуры. Что еще можно прибавить к этим разъяснениям?

Конечно, можно было бы сказать эдакую легкую речь обо всем и ни о чем *(легкий смех)*. Возможно, что такая речь позабавила бы

публику. Говорят, что мастера по таким речам имеются не только там, в капиталистических странах, но и у нас, в советской стране *(смех, аплодисменты)*. Но, во-первых, я не мастер по таким речам. Во-вторых, стоит ли нам заниматься делами забавы теперь, когда у всех у нас, большевиков, как говорится, «от работ полон рот». Я думаю, что не стоит.

Ясно, что при таких условиях хорошей речи не скажешь.

И все же, коль скоро я вышел на трибуну, конечно, приходится так или иначе сказать хотя бы кое-что *(шумные аплодисменты)*.

Прежде всего я хотел бы принести благодарность *(аплодисменты)* избирателям за доверие, которое они оказали *(аплодисменты)*.

Меня выставили кандидатом в депутаты и избирательная комиссия Сталинского округа советской столицы зарегистрировала меня как кандидата в депутаты. Это, товарищи, большое доверие. Разрешите принести вам глубокую большевистскую благодарность за то доверие, которое вы оказали партии большевиков, членом которой я состою и лично мне, как представителю этой партии *(шумные аплодисменты)*.

Я знаю, что значит доверие. Оно, естественно, возлагает на меня новые, дополнительные обязанности и, стало-быть, новую, дополнительную ответственность. Что же, у нас, у большевиков, не принято отказываться от ответственности. Я ее принимаю с охотой *(бурные продолжительные аплодисменты)*.

Со своей стороны я хотел бы заверить вас, товарищи, что вы можете смело положиться на товарища Сталина *(бурная, долго несмолкающая овация. Возглас из зала: «А мы все за товарищем Сталиным!»)*. Можете рассчитывать на то, что товарищ Сталин сумеет выполнить свой долг перед народом *(аплодисменты)*, перед рабочим классом *(аплодисменты)*, перед крестьянством *(аплодисменты)*, перед интеллигенцией *(аплодисменты)*.

Далее, я хотел бы, товарищи, поздравить вас с наступающим всенародным праздником, с днем выборов в Верховный Совет Советского Союза *(шумные аплодисменты)*. Предстоящие выборы это не просто выборы, товарищи. Это действительно всенародный праздник наших рабочих, наших крестьян, нашей интеллигенции *(бурные аплодисменты)*. Никогда в мире еще не бывало таких действительно свободных и действительно демократических выборов, никогда! История не знает другого такого примера *(аплодисменты)*. Дело идет не о том, что у нас будут выборы всеобщие, равные, тайные и прямые, хотя уже это само по себе имеет большое значение. Дело идет о том, что всеобщие выборы будут проведены у нас как наиболее свободные выборы и наиболее демократические в сравнении с выборами любой другой страны в мире.

Всеобщие выборы проходят и имеют место и в некоторых капиталистических странах, так называемых, демократических. Но в какой обстановке там проходят выборы? В обстановке классовых столкновений, в обстановке классовой вражды, в обстановке давления на избирателей со стороны капиталистов, помещиков, банкиров и прочих акул капитализма. Нельзя назвать такие выборы, даже если они всеобщие, равные, тайные и прямые, вполне свободными и вполне демократическими выборами.

У нас, в нашей стране, наоборот, выборы проходят в совершенно другой обстановке. У нас нет капиталистов, нет помещиков, стало-быть, и нет давления со стороны имущих классов на неимущих. У нас выборы проходят в обстановке сотрудничества рабочих, крестьян, интеллигенции, в обстановке взаимного их доверия, в обстановке, я бы сказал, взаимной дружбы, потому что у нас нет капиталистов, нет помещиков, нет эксплоатации и некому, собственно, давить на народ для того, чтобы исказить его волю.

Вот почему наши выборы являются единственными действительно свободными и действительно демократическими во всем мире *(шумные аплодисменты)*.

Такие свободные и действительно демократические выборы могли возникнуть только на почве торжества социалистических порядков, только на базе того, что у нас социализм не просто строится, а уже вошел в быт, в повседневный быт народа. Лет 10 тому назад можно было бы дискутировать о том, можно ли у нас строить социализм или нет. Теперь это уже не дискуссионный вопрос. Теперь это вопрос фактов, вопрос живой жизни, вопрос быта, который пронизывает всю жизнь народа. На наших фабриках и заводах работают без капиталистов. Руководят работой люди из народа. Это и называется у нас социализмом на деле. На наших полях работают труженики земли без помещиков, без кулаков. Руководят работой люди из народа. Это и называется у нас социализмом в быту, это и называется у нас свободной, социалистической жизнью.

Вот на этой базе и возникли у нас новые, действительно свободные и действительно демократические выборы, выборы, примера которым нет в истории человечества.

Как же после этого не поздравить вас с днем всенародного торжества, с днем выборов в Верховный Совет Советского Союза! *(Бурная овация всего зала).*

Дальше я хотел бы, товарищи, дать вам совет, совет кандидата в депутаты своим избирателям. Если взять капиталистические страны, то там между депутатами и избирателями существуют некоторые своеобразные, я бы сказал, довольно странные отношения. Пока идут выборы, депутаты заигрывают с избирателями, лебезят

перед ними, клянутся в верности, дают кучу всяких обещаний. Выходит, что зависимость депутатов от избирателей полная. Как только выборы состоялись и кандидаты превратились в депутатов,—отношения меняются в корне. Вместо зависимости депутатов от избирателей, получается полная их независимость. На протяжении 4-х или 5-ти лет, т. е. вплоть до новых выборов, депутат чувствует себя совершенно свободным, независимым от народа, от своих избирателей. Он может перейти из одного лагеря в другой, он может свернуть с правильной дороги на неправильную, он может даже запутаться в некоторых махинациях не совсем потребного характера, он может кувыркаться, как ему угодно,—он независим.

Можно ли считать такие отношения нормальными? Ни в коем случае, товарищи. Это обстоятельство учла наша Конституция и она провела закон, в силу которого избиратели имеют право досрочно отозвать своих депутатов, если они начинают финтить, если они свертывают с дороги, если они забывают о своей зависимости от народа, от избирателей.

Это замечательный закон, товарищи. Депутат должен знать, что он слуга народа, его посланец в Верховный Совет и он должен вести себя по линии, по которой ему дан наказ народом. Свернул с дороги, избиратели имеют право потребовать назначения новых выборов, и депутата, свернувшего с дороги, они имеют право прокатать на вороных *(смех, аплодисменты)*. Это замечательный закон. Мой совет, совет кандидата в депутаты своим избирателям, помнить об этом праве избирателей,—о праве досрочного отзыва депутатов, следить за своими депутатами, контролировать их и, ежели они вздумают свернуть с правильной дороги, смахнуть их с плеч, потребовать назначения новых выборов. Правительство обязано назначить новые выборы. Мой совет—помнить об этом законе и использовать его при случае.

Наконец, еще один совет кандидата в депутаты своим избирателям. Чего нужно вообще требовать от своих депутатов, если взять из всех возможных требований наиболее элементарные требования?

Избиратели, народ должны требовать от своих депутатов, чтобы они оставались на высоте своих задач, чтобы они в своей работе не спускались до уровня политических обывателей, чтобы они оставались на посту политических деятелей ленинского типа, чтобы они были такими же ясными и определенными деятелями, как Ленин *(аплодисменты)*, чтобы они были такими же бесстрашными в бою и беспощадными к врагам народа, каким был Ленин *(аплодисменты)*, чтобы они были свободны от всякой паники, от всякого подобия паники, когда дело начинает осложняться и на горизонте вырисовывается какая-нибудь опасность, чтобы они были также свободны

от всякого подобия паники, как был свободен Ленин *(аплодисменты)*, чтобы они были также мудры и неторопливы при решении сложных вопросов, где нужна всесторонняя ориентация и всесторонний учет всех плюсов и минусов, каким был Ленин *(аплодисменты)*, чтобы они были также правдивы и честны, каким был Ленин *(аплодисменты)*, чтобы они также любили свой народ, как любил его Ленин *(аплодисменты)*.

Можем ли мы сказать, что все кандидаты в депутаты являются именно такого рода деятелями? Я бы этого не сказал. Всякие бывают люди на свете, всякие бывают деятели на свете. Есть люди, о которых не скажешь, кто он такой, то ли он хорош, то ли он плох, то ли мужественен, то ли трусоват, то ли он за народ до конца, то ли он за врагов народа. Есть такие люди и есть такие деятели. Они имеются и у нас, среди большевиков. Сами знаете, товарищи, семья не без урода *(смех, аплодисменты)*. О таких людях неопределенного типа, о людях, которые напоминают скорее политических обывателей, чем политических деятелей, о людях такого неопределенного, неоформленного типа довольно метко сказал великий русский писатель Гоголь: «Люди, говорит, неопределенные, ни то, ни се, не поймешь, что за люди, ни в городе Богдан, ни в селе Селифан» *(смех, аплодисменты)*. О таких неопределенных людях и деятелях также довольно метко говорится у нас в народе: «так себе человек—ни рыба, ни мясо» *(общий смех, аплодисменты)*, «ни богу свечка ни черту кочерга» *(общий смех, аплодисменты)*.

Я не могу сказать с полной уверенностью, что среди кандидатов в депутаты (я очень извиняюсь перед ними, конечно) и среди наших деятелей не имеется людей, которые напоминают скорее всего политических обывателей, которые напоминают по своему характеру, по своей физиономии людей такого типа, о которых говорится в народе: «ни богу свечка, ни черту кочерга» *(смех, аплодисменты)*.

Я бы хотел, товарищи, чтобы вы влияли систематически на своих депутатов, чтобы им внушали, что они должны иметь перед собой великий образ великого Ленина и подражать Ленину во всем *(аплодисменты)*.

Функции избирателей не кончаются выборами. Они продолжаются на весь период существования Верховного Совета данного созыва. Я уже говорил о законе, дающем право избирателям на досрочный отзыв своих депутатов, если они сворачивают с правильной дороги. Стало быть, обязанность и право избирателей состоят в том, чтобы они все время держали под контролем своих депутатов и чтобы они внушали им—ни в коем случае не спускаться до уровня политических обывателей, чтобы они—избиратели внушали своим депутатам—быть такими, каким был великий Ленин *(аплодисменты)*.

Таков, товарищи, мой второй совет вам, совет кандидата в депутаты, своим избирателям. *(Бурные, долго несмолкающие аплодисменты, переходящие в овацию. Все встают и обращают свои взоры в правительственную ложу, куда проходит товарищ Сталин. Раздаются возгласы: «Великому Сталину, ура!», «Товарищу Сталину, ура!», «Да здравствует товарищ Сталин, ура!», «Да здравствует первый ленинец—кандидат в депутаты Совета Союза—товарищ Сталин! Ура!»).*

Редакция Математической серии «Известий Академии Наук СССР» посвящает свой очередной 4-й выпуск 20-й годовщине Великой Октябрьской Социалистической Революции.

Изумительны победы, одержанные трудящимися нашей страны за 20 лет под руководством партии Ленина—Сталина. В результате этих достижений социализм окончательно утвердился на территории шестой части земного шара. Трудящиеся СССР имеют сейчас самую демократическую из бывших когда-либо конституций. Сталинской конституцией справедливо гордится каждый честный гражданин нашей страны, на нее с надеждой взирают трудящиеся капиталистических стран.

Блестящие результаты выборов в Верховный Совет СССР, проведенных по новой конституции 12 декабря 1937 г., убедительно показывают, что многомиллионные народы, населяющие страну победившего социализма, единодушно поддерживают свою партию, свое правительство и полностью одобряют те великие политические, хозяйственные и культурные завоевания, которых они добились под руководством гениального вождя трудящихся товарища Сталина.

В СССР мы имеем небывалый расцвет социалистической культуры. В то время как в странах, где господствует варварский фашизм, наука уничтожается и заменяется средневековым мракобесием и зоологическим шовинизмом, в то время как там преследуют крупнейших ученых и разрушают научные центры, у нас, в стране социализма, происходит неизменный рост подлинной науки. И в этом отношении весьма показателен рост советской математики.

Наша родина всегда выдвигала крупные таланты. В прошлом русской математики мы имеем ряд блестящих имен. Лобачевский, Чебышев, Остроградский, Ковалевская, Марков, Ляпунов, Золотарев, Вороной вписали в историю математической науки яркие страницы. Но в условиях царской России таланты пробивались с трудом. И только после Октябрьской революции научно-исследовательская работа по математике в нашей стране получила надлежащее развитие.

У нас прогресс математики обеспечивается работой свыше десяти научно-исследовательских математических институтов, в которых сконцентрированы лучшие научные силы страны. Пополнение кадров ученых по математике происходит непрерывно и обеспечивается широко развернутой аспирантурой. Итоги достижений советской математики подводились на математических съездах в Москве (1927), в Харькове (1930) и в Ленинграде (1934), которые, в свою очередь, создавали стимул для усиления научно-исследовательской работы по математике.

Характерной особенностью советской математики является глубина и высокое качество полученных научных результатов в весьма разнообразных областях математики. Первоклассные результаты получены нашими учеными по алгебре, по теории чисел, по теории функций действительного и комплексного переменного, по анализу, по теории вероятностей и по топологии. Совокупность этих достижений показывает, что советская математика занимает одно из первых мест в мире.

Ученые Страны Советов знают, что только социалистическое государство может обеспечить подлинный расцвет науки. Ярким примером этого являются достижения советской математики, начиная от самых абстрактных ее областей и кончая прикладными ее отделами. И если первые двадцать лет существования советского государства ознаменованы крупными достижениями в математике, то это вселяет в нас уверенность, что в дальнейшем математическая наука в нашей стране получит еще большее развитие и даст ряд новых научных открытий, достойных нашей великой эпохи.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

С. Н. БЕРНШТЕЙН

О ФОРМУЛАХ КВАДРАТУР С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Настоящая статья устанавливает условия необходимые и условия достаточные для того, чтобы формулы квадратур, пригодные для многочленов данной степени, имели положительные коэффициенты. Благодаря этому получается общий метод для построения возможно простых формул квадратур, в которых все коэффициенты выражаются положительными рациональными числами с возможно малым общим знаменателем, либо таких, в которых абсциссы имеют возможно малые знаменатели.

§ 1. Пусть $P_l(x)$ будет многочленом Лежандра степени l на отрезке $(-1, +1)$, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ его корни, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{l-1}$ корни его производной $P_l'(x)$. Положим

$$\left.\begin{aligned} F(x, a) &= P_l(x) + a(x+1) P_l'(x), \\ \Phi(x, a) &= (-1)^l F(-x, a) = P_l(x) + a(x-1) P_l'(x). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Обозначая через $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_l$ корни $F(x, a)$ и через $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_l$ корни $\Phi(x, a)$, имеем при $a > 0$

$$\begin{aligned} -1 < \xi_1 < \gamma_1 < \eta_1 < \beta_1 < \dots < \gamma_k < \eta_k < \beta_k < \\ < \xi_{k+1} < \dots < \xi_l < \gamma_l < \eta_l < 1, \end{aligned} \quad (2)$$

так как

$$\begin{aligned} F(-1, a) \cdot F(\gamma_1, a) &= a(\gamma_1 + 1) P_l(-1) \cdot P_l'(\gamma_1) < 0, \\ F(\beta_k, a) \cdot F(\gamma_{k+1}, a) &= a(\gamma_{k+1} + 1) P_l(\beta_k) \cdot P_l'(\gamma_{k+1}) < 0, \\ \Phi(\gamma_k, a) \cdot \Phi(\beta_k, a) &= a(\gamma_k - 1) P_l'(\gamma_k) \cdot P_l(\beta_k) < 0, \\ \Phi(\gamma_l, a) \cdot \Phi(1, a) &= a(\gamma_l - 1) P_l'(\gamma_l) \cdot P_l(1) < 0. \end{aligned}$$

Очевидно также, что $\xi_{k+1} + \eta_{l-k} = 0$.

Кроме того, имеет место

ТЕОРЕМА I. *Корни $\xi_k(a)$, рассматриваемые как функции параметра a, убывают от γ_k до β_{k-1} при всех значениях $k = 1, 2, \dots, l$ (полагая $\beta_0 = -1$) при возрастании a от 0 до ∞; в то же время η_k возрастает от γ_k до β_k* (полагая $\beta_l = 1$).

Действительно

$$\frac{d\xi_k}{da} = -\frac{(\xi_k+1)P_l'(\xi_k)}{(1+a)P_l'(\xi_k)+a(\xi_k+1)P_l''(\xi_k)} =$$

$$= -\frac{(\xi_k+1)P_l'(\xi_k)}{(1+a)P_l'(\xi_k)+\frac{a[l(l+1)P_l(\xi_k)-2\xi_k P_l'(\xi_k)]}{\xi_k-1}} =$$

$$= \frac{(1-\xi_k^2)P_l'(\xi_k)}{al(l+1)P_l(\xi_k)+P_l'(\xi_k)[\xi_k-1-a(\xi_k+1)]} =$$

$$= \frac{(\xi_k^2-1)}{(1-\xi_k)+a[l(l+1)a+1](1+\xi_k)} < 0. \tag{3}$$

Точно так же

$$\frac{d\eta_k}{da} = \frac{1-\eta_k^2}{(1+\eta_k)+a[l(l+1)a+1](1-\eta_k)} > 0. \tag{4}$$

С другой стороны, легко проверить, что формулы квадратур

$$\left.\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{l} \rho(\xi_k) f(\xi_k) + \rho_a f(1), \\ \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{l} \rho(\eta_k) f(\eta_k) + \rho_a f(-1), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

соответствующие корням многочлена $(l+1)$-ой степени $(x-1)F(x,a)$ или $(x+1)\Phi(x,a)$, верны для любых многочленов $R_{2l-1}(x)$ степени $2l-1$, так как

$$R_{2l-1}(x) = (x-1)F(x,a)Q_{l-2}(x) + R_l(x),$$

где $Q_{l-2}(x)$ степени $l-2$, а потому

$$\int_{-1}^{+1} (x-1)F(x,a)Q_{l-2}(x)\,dx = a\int_{-1}^{+1}(x^2-1)P_l'(x)Q_{l-2}(x)\,dx = 0.$$

Очевидно, что $\rho(\eta_{k+1}) = \rho(\xi_{l-k})$.

Заметим далее, что

$$\rho_a = \int_{-1}^{+1}\frac{F(x,a)\,dx}{F(1,a)} = \int_{-1}^{+1}\frac{P_l(x)+a(x+1)P_l'(x)}{al(l+1)+1}\,dx = \frac{2a}{al(l+1)+1}. \tag{6}$$

Таким образом при возрастании a от 0 до ∞ коэффициент ρ_a растет от 0 до $\rho_\infty = \frac{2}{l(l+1)}$. Условимся писать $\rho_\infty = \rho(\pm 1)$, имея в виду, что когда ξ_1 (с возрастанием a до ∞) стремится к пределу -1, $\rho(\xi_1)$ как непрерывная функция ξ_1 стремится к значению $\rho(-1) = \frac{2}{l(l+1)}$, которое является коэффициентом $\rho(\beta_0)$ формулы квадратур, соответствующей абсциссам $\beta_0 = -1, \beta_1 < \ldots < \beta_{l-1}$, $\beta_l = 1$.

Вообще, коэффициенты $\rho(\xi_k)$ определим из равенств

$$\rho(\xi_k) = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-1)\,F(x,a)\,P_l'(x)\,dx}{(\xi_k-1)\,F_x'(\xi_k,a)\,P_l'(\xi_k)\,(x-\xi_k)} = \frac{2F(-1,a)\,P_l(-1)}{(1-\xi_k^2)\,F_x'(\xi_k,a)\,P_l'(\xi_k)} =$$

$$= \frac{2}{(1-\xi_k^2)\,P_l'(\xi_k)\,[(1+a)\,P_l'(\xi_k)+a\,(\xi_k+1)\,P_l''(\xi_k)]},$$

откуда, пользуясь уравнением

$$(1-x^2)\,P_l''(x) - 2x\,P_l'(x) + l\,(l+1)\,P_l(x) = 0,$$

находим, что

$$\rho(\xi_k) = \frac{2}{(1-\xi_k^2)(1+a)\,P_l'^2(\xi_k) + a\,(\xi_k+1)\,P_l'(\xi_k)\,[2\xi_k P_l'(\xi_k) - l\,(l+1)\,P_l(\xi_k)]} =$$

$$= \frac{2}{(1-\xi_k^2)\,P_l'^2(\xi_k) + a\,[(1+\xi_k)^2 P_l'^2(\xi_k) - l\,(l+1)\,(1+\xi_k)\,P_l(\xi_k)\,P_l'(\xi_k)]} =$$

$$= \frac{2\,(1+\xi_k)\,a^2}{P_l^2(\xi_k)\left\{1-\xi_k + a\,[1+al\,(l+1)]\,(1+\xi_k)\right\}} =$$

$$= \frac{2}{(1-\xi_k^2)\,P_l'^2(\xi_k) - (1+\xi_k)\,P_l(\xi_k)\,P_l'(\xi_k) + l\,(l+1)\,P_l^2(\xi_k)}. \tag{7}$$

Принимая во внимание, что $P_l(\xi_k)\,P_l'(\xi_k) < 0$, имеем, вообще, при $0 < a < \infty$

$$0 < \rho(\xi_k) < \frac{2}{(1-\xi_k^2)\,P_l'^2(\xi_k) + l\,(l+1)\,P_l^2(\xi_k)}; \tag{8}$$

при $a = 0$ и $a = \infty$ получаем

$$\rho(\gamma_k) = \frac{2}{(1-\gamma_k^2)\,P_l'^2(\gamma_k)}, \qquad \rho(\beta_k) = \frac{2}{l(l+1)\,P_l^2(\beta_k)}. \tag{9}$$

Точно так же вследствие равенств $\eta_{k+1} = -\xi_{l-k}$, $\rho(\eta_{k+1}) = \rho(\xi_{l-k})$ находим, что

$$\rho(\eta_k) = \frac{2}{(1-\eta_k^2)\,P_l'^2(\eta_k) + (1-\eta_k)\,P_l(\eta_k)\,P_l'(\eta_k) + l\,(l+1)\,P_l^2(\eta_k)}. \tag{10}$$

Таким образом можем определить непрерывную функцию $\rho(x) = \rho(-x)$ на промежутке $(-1, +1)$ по условию, что

$$\rho(x) = \frac{2}{(1-x^2)\,P_l'^2(x) - (1+x)\,P_l(x)\,P_l'(x) + l\,(l+1)\,P_l^2(x)} \tag{11}$$

во всех промежутках (β_{k-1}, γ_k) и

$$\rho(x) = \frac{2}{(1-x^2)\,P_l'^2(x) + (1-x)\,P_l(x)\,P_l'(x) + l\,(l+1)\,P_l^2(x)} \tag{11 bis}$$

во всех промежутках (γ_k, β_k) при значениях $k = 1, \ldots, l$, где, как и выше, мы полагаем $\beta_0 = -1$, $\beta_l = 1$.

§ 2. Роль функции $\rho(x)$ в исследовании формул квадратур с положительными коэффициентами вытекает из следующей теоремы:

ТЕОРЕМА II. *Если формула квадратур*

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \quad p_i > 0 \quad (-1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1) \tag{12}$$

верна для всех многочленов степени $2l-1$, *то*

$$p_i \leqslant \rho(x_i), \tag{13}$$

причем знак равенства в (13) *имеет место лишь при условии, что формула* (12) *совпадает с той единственной из формул* (5), *в которой есть абсцисса* ξ_k *или* η_k, *равная* $x_i \neq -1$ (*если же* $x_i = \pm 1$, *то знак равенства соответствует формуле квадратур с абсциссами* $-1 = \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l = 1$).

В самом деле, пусть $x_i \neq \pm 1$ одна из абсцисс формулы (12), лежащая в промежутке (β_{k-1}, γ_k), совпадающая, следовательно, с корнем ξ_k многочлена $F(x, a)$ для некоторого $a \geqslant 0$. Строим многочлен $f(x)$ степени $2l-1$

$$f(x) = \frac{F^2(x, a)(1-x)}{(x-\xi_k)^2(1-\xi_k)F_x'^2(\xi_k, a)},$$

который, обращаясь в нуль в точках ξ_j $(j \gtrless k)$ и 1, равен 1 при $x = \xi_k = x_i$, положителен во всех прочих точках отрезка $(-1, +1)$.

В таком случае

$$\rho(\xi_k) = \rho(x_i) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j) > p_i,$$

если только все точки x_j не совпадают с корнями $f(x)$, т. е. если формула (12) не совпадает с (5).

При $x_1 = 1$, полагая

$$f(x) = \frac{P_l'^2(x)(1+x)}{2P_l'^2(1)},$$

мы получаем также, что

$$\rho(1) = \frac{2}{l(l+1)} = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx > p_1,$$

если только все прочие абсциссы x_j не совпадают с корнями $P_l'(x)(1+x)$.

Аналогичным образом можем установить монотонно возрастающую непрерывную функцию $\pi(x)$, представляющую максимум суммы коэффициентов $\sum^{x_i \leqslant x} p_i = T(x)$, распространенной на все абсциссы $x_i \leqslant x$ любой формулы квадратур (12), пригодной для всех многочленов степени $2l-1$. А именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА III. *Пусть* $1 < x \leqslant \gamma_l$; *в таком случае, если, при соответствующем выборе* a, $x = \xi_k$ (*т. е.* $\beta_{k-1} \leqslant x \leqslant \gamma_k$), *то максимум* $\pi(x)$ *суммы* $T(x)$ *осуществляется только формулой* (5), *т. е.*

$$\sum^{x_i \leqslant x} p_i = T(x) \leqslant \pi(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \rho(\xi_i) \quad (0 < k \leqslant l); \tag{14}$$

если же $x = \eta_k$ (*т. е.* $\gamma_k \leqslant x \leqslant \beta_k$), *то максимум* $\pi(x)$ *суммы* $T(x)$ *также осуществляется только соответствующей формулой* (5), *т. е.*

$$\sum^{x_i \leqslant x} p_i = T(x) \leqslant \pi(x) = \rho_a + \sum_{i=1}^{k} \rho(\eta_i) \quad (0 < k < l). \qquad (14\,\text{bis})$$

При $x = -1$, $\pi(x) = \rho(-1) = \frac{2}{l(l+1)}$, *а при* $\gamma_l \leqslant x \leqslant 1$, $\pi(x) = 2$.

Так как равенство $\pi(-1) = \rho(-1)$ вытекает из теоремы II, а равенство $\pi(x) = 2$ очевидно для $\gamma_l \leqslant x$, то доказательства требуют лишь неравенства (14) и (14 bis). Начнем с первого: пусть $x = \xi_k$.

Построим многочлен $f(x)$ степени $2l - 1$, определяемый $2l = (l+1) + (l-1)$ условиями:

$$f(\xi_1) = \ldots = f(\xi_k) = 1,$$
$$f(\xi_{k+1}) = \ldots = f(\xi_l) = f(1) = 0,$$
$$f'(\xi_1) = \ldots = f'(\xi_{k-1}) = f'(\xi_{k+1}) = \ldots = f'(\xi_l) = 0.$$

Так как $f'(x)$, кроме данных $l - 1$ корней, имеет еще, по крайней мере, по одному корню во всех промежутках (ξ_i, ξ_{i+1}) и $(\xi_l, 1)$, кроме промежутка (ξ_k, ξ_{k+1}), то $f'(x)$ иных корней не имеет, а потому $f(x)$ в промежутке (ξ_k, ξ_{k+1}) убывает от 1 до 0, и кроме того, $f(x) \geqslant 1$ при $x \leqslant \xi_k$ и $f(x) \geqslant 0$ при $x \leqslant 1$. Следовательно, из формул (5) и (12) находим, что

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \rho(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geqslant \sum^{x_i \leqslant \xi_k} p_i,$$

причем знак равенства имеет место лишь тогда, когда формулы (5) и (12) совпадают. Таким образом (14) доказано.

Положим теперь, что $x = \eta_k$. В таком случае строим многочлен $f(x)$ степени $2l - 1$, определенный $2l$ условиями $(k < l)$:

$$f(-1) = f(\eta_1) = \ldots = f(\eta_k) = 1,$$
$$f(\eta_{k+1}) = \ldots = f(\eta_l) = 0,$$
$$f'(\eta_1) = \ldots = f'(\eta_{k-1}) = f'(\eta_{k+1}) = \ldots = f'(\eta_l) = 0.$$

Подобно предыдущему замечаем, что $f(x)$ убывает от 1 до 0 в промежутке (η_k, η_{k+1}), и, кроме того, $f(x) \geqslant 1$ при $-1 \leqslant x \leqslant \eta_k$. Следовательно, применяя формулы (5) и (12), получаем

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \rho_a + \sum_{i=1}^{k} \rho(\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geqslant \sum^{x_i \leqslant \eta_k} p_i,$$

причем знак равенства осуществляется лишь при совпадении формул (5) и (12), откуда следует (14 bis).

Заметим, что неравенство (14 bis) справедливо и при $k = l$, так как правая его часть тогда равна 2.

Принимая во внимание, что то же рассуждение может быть сделано, переставляя точки -1 и $+1$, получаем также, что

$$\sum^{x_i \geqslant \xi_k} p_i \leqslant \sum_{i=k}^{l} \rho(\xi_i) + \rho_a = 2 - \pi(\xi_{k-1}),$$

$$\sum^{x_i \geqslant \eta_k} p_i \leqslant \sum_{i=k}^{l} \rho(\eta_i) = 2 - \pi(\eta_{k-1}),$$

откуда заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} \sum^{x_i < \xi_k} p_i = 2 - \sum^{x_i \geqslant \xi_k} p_i \geqslant \pi(\xi_{k-1}) = \pi(\xi_k) - \rho(\xi_k), \\ \sum^{x_i < \eta_k} p_i \geqslant \pi(\eta_{k-1}) = \pi(\eta_k) - \rho(\eta_k), \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

причем, за исключением случая $0 < \xi_1 < \gamma_1$ (когда правая часть равна 0), существует только одна формула квадратур (5), где равенство имеет место.

Из этих неравенств вместе с неравенствами (14) и (14 bis) можно было бы также получить теорему II.

Тем более имеет место неравенство

$$T(x) = \sum^{x_i \leqslant x} p_i > \pi(x) - \rho(x), \quad (16)$$

где знак равенства при $x \geqslant \gamma_1$ невозможен, так что правая часть представляет *недостигаемый* минимум для сумм $T(x)$ [к которому $T(x)$, конечно, может сколько угодно приблизиться, так как $\pi(x) - \rho(x)$ является *достигаемым* минимумом для $\sum^{x_i < x} p_i$].

Следствие I. *Если одна из абсцисс x_i в формуле квадратур* (12) *является корнем уравнения $F(x, a)(1 - x) = 0$ или $\Phi(x, a) \cdot (1 + x) = 0$ и $x_i^0 > x_i$ есть соседний корень того же самого из этих уравнений, то $x_{i+1} \leqslant x_i^0$, причем знак равенства имеет место лишь тогда, когда все абсциссы являются корнями того же самого уравнения.*

Действительно, если $x_i < x_i^0$ два смежных корня одного из уравнений $(1 - x) F(x, a) = 0$ или $(1 + x) \Phi(x, a) = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{x_j \leqslant x_i} p_j \leqslant \pi(x_i) = \pi(x_i^0) - \rho(x_i^0) \leqslant \sum^{x_j < x_i^0} p_j,$$

причем знаки равенства осуществляются лишь тогда, когда все абсциссы x_j являются корнями одного и того же уравнения

$(1-x)F(x,a)=0$ или $(1+x)\Phi(x,a)=0$. Следовательно, за исключением этого случая, $x_{i+1}<x_i^0$.

§ 3. Если вместо отрезка $(-1,+1)$ взять любой отрезок AB и рассматривать формулы квадратур с положительными коэффициентами C_i

$$\int_A^B f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} C_i f(y_i),\quad (C_i>0,\ A\leqslant y_1<\ldots<y_n\leqslant B),\tag{17}$$

пригодные для всех многочленов степени $2l-1$, то все они, очевидно, получаются из (12), полагая

$$C_i=\frac{B-A}{2}p_i,\qquad y_i=\frac{B-A}{2}x_i+\frac{A+B}{2}.$$

Поэтому

$$\sum^{A\leqslant y_i\leqslant y} C_i\leqslant\frac{B-A}{2}\pi\left(\frac{2y-A-B}{B-A}\right).\tag{18}$$

Отсюда можем вывести некоторые существенные свойства функции $\pi(x)$.

ТЕОРЕМА IV. *Функции* $\frac{\pi(x)}{1+x}$ *и* $\frac{2-\pi(x)}{1-x}$ *являются монотонно убывающими в промежутке* $(-1,+1)$ (*вторая из них равна нулю при* $x\geqslant\gamma_l$).

Для доказательства замечаем, что если формулы

$$\int_{-1}^{h} f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{l+1} C_i f(y_i),\qquad \int_{h}^{1} f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{l+1} C_i' f(y_i'),\tag{19}$$

где $C_i>0$, $C_i'>0$, $-1\leqslant y_i\leqslant h\leqslant y_i'\leqslant 1$, верны для всех многочленов степени $2l-1$, то верна также и формула

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{l+1} C_i f(y_i)+\sum_{i=1}^{l+1} C_i' f(y_i').\tag{17bis}$$

Поэтому, полагая $-1<a<h<1$, можем выбрать первую из формул (19) так, чтобы

$$\sum^{y_i\leqslant a} C_i=\frac{h+1}{2}\pi\left(\frac{2a+1-h}{1-h}\right).$$

Следовательно, из теоремы III заключаем, что

$$\frac{h+1}{2}\pi\left(\frac{2a+1-h}{1+h}\right)<\pi(a).$$

Откуда, определяя h при всяком $b>a$, из равенства

$$b=\frac{2a+1-h}{1+h}$$

получаем

$$\frac{h+1}{2}\pi(b) < \pi(a),$$

и так как $h = \frac{1+2a-b}{1+b}$, то

$$\frac{\pi(a)}{1+a} > \frac{\pi(b)}{1+b} > 1. \tag{20}$$

Аналогичным образом выберем теперь вторую из формул (19) так, чтобы при $-1 < h < b \leqslant \gamma_l$

$$\sum^{h\leqslant y_i'\leqslant b} C_i' = \frac{1-h}{2}\pi\left(\frac{2b-1-h}{1-h}\right).$$

Поэтому, замечая, что $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1 + h$, имеем

$$1 + h + \frac{1-h}{2}\pi\left(\frac{2b-1-h}{1-h}\right) < \pi b.$$

Следовательно, определяя h при всяком $a < b$, из равенства

$$\frac{2b-1-h}{1-h} = a, \quad \text{т. е.} \quad h = \frac{2b-a-1}{1-a},$$

находим

$$1 + h + \frac{1-h}{2}\pi(a) < \pi(b),$$

откуда

$$\frac{2(b-a)}{1-a} + \frac{1-b}{1-a}\pi(a) < \pi(b),$$

т. е.

$$\frac{2-\pi(b)}{1-b} < \frac{2-\pi(a)}{1-a} < 1 - \frac{1}{l(l+1)} < 1. \tag{21}$$

Следствие II. *При любых значениях* $-1 < a < b \leqslant \gamma_l$ *имеют место неравенства*

$$\frac{2-\pi(b)}{1-b} < \frac{2-\pi(a)}{1-a} < \frac{\pi(b)-\pi(a)}{b-a} < \frac{\pi(b)}{1+b} < \frac{\pi(a)}{1+a}. \tag{22}$$

Аналогичным образом из (15) следует, что коэффициенты $C_i > 0$ формулы (17) удовлетворяют также неравенству

$$\sum^{A\leqslant y_i < y} C_i \geqslant \frac{B-A}{2}\left[\pi\left(\frac{2y-A-B}{B-A}\right) - \rho\left(\frac{2y-A-B}{B-A}\right)\right], \tag{23}$$

а потому, применяя тот же прием, что при доказательстве теоремы IV, находим

Следствие III. *Функции* $\frac{\pi(x)-\rho(x)}{1+x}$ и $\frac{2-\pi(x)+\rho(x)}{1-x}$ *являются монотонно возрастающими при* $(-1 < x < 1)$ *(первая из них равна нулю при* $x \leqslant \gamma_1$).

В частности, из (21) вытекает, что

$$\pi(x) > 1 + x + \frac{1-x}{l(l+1)},$$

и так как $\rho(x) = \pi(x)$ при $x \leqslant \gamma_1$, то $\rho(x) > 1 + x + \frac{1-x}{l(l+1)}$ при $-1 < x \leqslant \gamma_1$; а из того, что $\frac{\pi(x) - \rho(x)}{1+x} < 1 - \frac{1}{l(l+1)}$ следует, что $(-1 < x < 1)$

$$\pi(x) < 1 + x - \frac{1+x}{l(l+1)} + \rho(x).$$

Из следствия III при $-1 < a < b < 1$ получаем также

$$\frac{2 - \pi(a) + \rho(a)}{1-a} > \frac{\pi(b) - \rho(b) - \pi(a) + \rho(a)}{b-a} > \frac{\pi(b) - \rho(b)}{1+b}. \qquad (24)$$

Сопоставляя эти неравенства с (22), получим

$$\begin{gathered} \frac{b-a}{1+b}\pi(b) > \pi(b) - \pi(a) > \frac{b-a}{1+b}\pi(b) - \rho(a) + \frac{1+a}{1+b}\rho(b), \\ \frac{b-a}{1-a}(2-\pi(a)) + \rho(b) - \frac{1-b}{1-a}\rho(a) > \pi(b) - \pi(a) > \frac{b-a}{1-a}(2-\pi(a)), \end{gathered} \qquad (25)$$

откуда следует также, что $(-1 < a < b < 1)$

$$\frac{1+b}{1+a} > \frac{\rho(b)}{\rho(a)} > \frac{1-b}{1-a}, \qquad (26)$$

т. е. $\frac{\rho(x)}{1+x}$ есть функция убывающая, а функция $\frac{\rho(x)}{1-x}$ есть функция возрастающая; в этом можно было бы также убедиться непосредственно из рассмотрения выражений (11) и (11bis), так как легко проверить, полагая $\rho(x) = \frac{2}{\tau(x)}$, что при $\beta_{k-1} < x < \gamma_k$

$$\frac{\tau(x)}{1-x} - \tau'(x) = 2P_l'^2(x), \qquad (27)$$

откуда

$$\frac{d\left(\frac{\rho(x)}{1-x}\right)}{dx} = \frac{\rho^2(x)\, P_l'^2(x)}{1-x} > 0$$

и

$$\frac{d\left(\frac{\rho(x)}{1+x}\right)}{dx} = \frac{\rho^2(x)\,[(1+x)\,P_l(x)\,P_l'(x) - l(l+1)\,P_l^2(x)]}{(1+x)(1-x^2)} < 0.$$

(Вследствие четности функции $\rho(x)$ те же неравенства верны при $\gamma_k < x < \beta_k$.)

Что же касается самой функции $\rho(x)$, то, замечая, что левая часть равенства (при $\beta_{k-1} < x < \gamma_k$)

$$(1-x)\,\tau'(x) = l(l+1)\,P_l^2(x) - P_l(x)\,P_l'(x)\,(1+x) - (1-x)^2\,P_l'^2(x)$$

есть многочлен $(2l-1)$-ой степени, получающий противоположные знаки в $2l-1$ точках β_i, γ_i и имеющий корнем $x = 1$, заключаем, что в промежутке $(-1, \gamma_1)$ $\tau'(x) < 0$, а в прочих промежутках

(β_{k-1}, γ_k) имеет один и только один корень. Поэтому $\tau(x)$ возрастает при изменении x от -1 до γ_1 и внутри каждого из промежутков (β_{k-1}, γ_k), а также и (γ_k, β_k) имеет по одному относительному минимуму; таким образом, с другой стороны, в точках β_i, γ_i кривая $y = \rho(x)$ имеет относительные максимумы с угловыми точками. При этом, вследствие уравнения (27) и соответствующего ему $\frac{\tau(x)}{1+x} + \tau'(x) = 2P'^2(x)$ в промежутках (γ_k, β_k) находим, что

$$\left.\begin{aligned} &\tau'(-1) = \frac{l(l+1)}{2} - \frac{l^2(l+1)^2}{2}, && \rho'(-1) = 1 - \frac{1}{l(l+1)},\\ &\bar{\tau}'(\gamma_k) = \frac{\tau(\gamma_k)}{1-\gamma_k} - 2P_l'^2(\gamma_k), && \bar{\rho}'(\gamma_k) = \frac{\rho(\gamma_k)}{1+\gamma_k},\\ &\overset{+}{\tau}'(\gamma_k) = -\frac{\tau(\gamma_k)}{1+\gamma_k} + 2P_l'^2(\gamma_k), && \overset{+}{\rho}'(\gamma_k) = \frac{-\rho(\gamma_k)}{1-\gamma_k},\\ &\bar{\tau}'(\beta_k) = -\frac{\tau(\beta_k)}{1+\beta_k}, && \bar{\rho}'(\beta_k) = \frac{\rho(\beta_k)}{1+\beta_k},\\ &\overset{+}{\tau}'(\beta_k) = \frac{\tau(\beta_k)}{1-\beta_k}, && \overset{+}{\rho}'(\beta_k) = -\frac{\rho(\beta_k)}{1-\beta_k}. \end{aligned}\right\} \quad (27\,\text{bis})$$

С другой стороны, эти относительные максимумы кривой $y = \rho(x)$ в последовательных точках $\gamma_1 < \beta_1 < \ldots$ идут, возрастая при $x \leqslant 0$ так что имеют место неравенства

$$\frac{2}{l(l+1)} = \rho(-1) < \rho(\gamma_1) < \rho(\beta_1) < \ldots < \rho\left(\gamma_{\left[\frac{l}{2}\right]}\right) < \rho\left(\beta_{\left[\frac{l}{2}\right]}\right) \leqslant \rho(0).$$

Действительно, из (8) следует, что

$$\rho(x) \leqslant \frac{2}{(1-x^2)P_l'^2(x) + l(l+1)P_l^2(x)} = \frac{2}{Z(x)},$$

причем знак равенства имеет место в точках $\pm 1, \gamma_i, \beta_i$. В таком случае знак

$$Z'(x) = 2P_l'(x)\left[l(l+1)P_l(x) - xP_l'(x) + (1-x^2)P_l''(x)\right] = 2xP_l'^2(x)$$

совпадает со знаком x; поэтому $Z(x)$ достигает минимума $Z(0) = P_l'^2(0) + l(l+1)P_l^2(0)$ при $x = 0$.

Таким образом абсолютный максимум $\rho(x)$ достигается при $x = 0$ и равен он

$$\rho(0) = \frac{2}{l(l+1)P_l^2(0)} = \frac{2}{l(l+1)}\left[\frac{2\cdot 4\ldots l}{1\cdot 3\ldots(l-1)}\right]^2 \sim \frac{\pi}{l} \quad (28)$$

при l четном и

$$\rho(0) = \frac{2}{P_l'^2(0)} = 2\left[\frac{2\cdot 4\ldots(l-1)}{1\cdot 3\ldots l}\right]^2 \sim \frac{\pi}{l} \quad (28\,\text{bis})$$

при l нечетном.

Заметим, что, применяя асимптотические формулы для многочленов $P_l(x)$ и $P_l'(x)$ к выражениям (11) и (11 bis), получаем вообще

$$\rho(x) \sim \frac{\pi}{l}\sqrt{1-x^2} \quad (29)$$

при $l \to \infty$ для любого данного x внутри отрезка $(-1, +1)$. Как мною показано в другой статье (ДАН, т. XIV, № 6, 1937), при всех конечных значениях l

$$\rho(\gamma_i) < \frac{\pi}{l}\sqrt{1-\gamma_i^2}.$$

Прежде чем перейти к приложениям полученных здесь результатов, укажем еще, что в любой формуле квадратур (12)

$$1 + x + \frac{1-x}{l(l+1)} - \rho(x) < \sum^{x_i < x} p_i \leqslant \sum^{x_i \leqslant x} p_i < 1 + x - \frac{1+x}{l(l+1)} + \rho(x). \quad (30)$$

Таким образом *во всякой формуле квадратур* (12), *справедливой для многочленов степени* $2l-1$, *каждая из сумм* $\sum^{x_i<x} p_i$ *и* $\sum^{x_i\leqslant x} p_i$ *равна* $1+x$ *с погрешностью меньшей, чем* $\rho(x)$.

§ 4. ТЕОРЕМА V. *Для того чтобы формула квадратур*

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{l-1} p_i[f(x_i) + f(-x_i)] + p_l f(0), \quad (31)$$

соответствующая корням многочлена

$$R(x) = x(x^2 - x_1^2)\dots(x^2 - x_{l-1}^2), \quad (32)$$

верная для всех многочленов $f(x)$ *степени* $2l-1$, *имела положительные коэффициенты* p_i, *достаточно, чтобы*

$$-1 \leqslant x_1 < \gamma_1 < x_2 < \beta_1 < \dots < x_{l-2} < \beta_{\frac{l-2}{2}} < x_{l-1} < \gamma_{\frac{l}{2}} < 0 \quad (33)$$

(*где для определенности* l *предположено четным*) *и чтобы, кроме того,*

$$x_1^0 < x_3; \quad x_2^0 < x_4; \dots; x_{l-3}^0 < x_{l-1} \quad (34)$$

(*полагая попрежнему, что* $x_i^0 > x_i$ *есть соседний корень того же уравнения* $F(x,a)=0$ *или* $\Phi(x,a)=0$, *которому удовлетворяет* x_i).

В самом деле, коэффициенты p_i определяются однозначно из системы l уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{l-1} p_i + \frac{1}{2}p_l = 1, \\ &\sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i^{2k} = \frac{1}{2k+1} \quad (k = 1, \dots, l-1). \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Рассмотрим, в частности, формулу квадратур, соответствующую многочлену

$$R_0(x) = \frac{P_l'(x)\cdot P_l(x)\,[x^2 - (\gamma_1 - \varepsilon)^2]}{x^2 - \gamma_{\frac{l}{2}}^2}, \quad (36)$$

где $0 < \varepsilon < \gamma_1 + 1$. Легко убедиться, что коэффициенты $p(\beta_k)$, $p(\gamma_k)$, соответствующие абсциссам β_k, γ_k (кроме γ_1), так же, как и коэффициент $p_1(\gamma_1 - \varepsilon)$ при абсциссе $\gamma_1 - \varepsilon$, будут положительны.

Действительно,

$$p(\beta_k) P_l(\beta_k) P_l''(\beta_k) [\beta_k^2 - (\gamma_1 - \varepsilon)^2] =$$
$$= \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x) P_l'(x) [x^2 - (\gamma_1 - \varepsilon)^2] (\beta_k^2 - \gamma_1^2)\, dx}{(x^2 - \gamma_1^2)(x - \beta_k)} =$$
$$= \int_{-1}^{+1} P_l(x) P_l'(x) \left[\frac{\beta_k^2 - (\gamma_1 - \varepsilon)^2}{x - \beta_k} + \frac{(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma_1)(x + \beta_k)}{(x^2 - \gamma_1^2)} \right] dx =$$
$$= (\varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma_1) \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x) P_l'(x)(x + \beta_k)}{x^2 - \gamma_1^2}\, dx = (\varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma_1)\left(\frac{2}{1 - \gamma_1^2}\right),$$

откуда

$$p(\beta_k) = \frac{2(2\varepsilon\gamma_1 - \varepsilon^2)}{[(\gamma_1 - \varepsilon)^2 - \beta_k^2](1 - \gamma_1^2) P_l(\beta_k) P_l''(\beta_k)} =$$
$$= \frac{2(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma_1)(1 - \beta_k^2)}{l(l+1)[(\gamma_1 - \varepsilon)^2 - \beta_k^2](1 - \gamma_1^2) P_l^2(\beta_k)} > 0.$$

Аналогично находим

$$p(\gamma_k) = \frac{2[1 - (\gamma_1 - \varepsilon)^2](\gamma_1^2 - \gamma_k^2)}{[(\gamma_1 - \varepsilon)^2 - \gamma_k^2](1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_k^2) P_l'^2(\gamma_k)} > 0,$$
$$p(\gamma_1 - \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma_1}{(1 - \gamma_1^2)(\gamma_1 - \varepsilon) P_l(\gamma_1 - \varepsilon) P_l'(\gamma_1 - \varepsilon)} > 0.$$

Можем положить, например, $\gamma_1 - \varepsilon = x_1$.

После этого осуществим непрерывный переход от абсцисс x_1, $\beta_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\frac{l}{2}}$ к данным абсциссам $x_1, \ldots, x_{l-1}$ следующим образом. Положим

$$\begin{aligned}
x_1(\lambda) &= x_1, \\
x_2(\lambda) &= \lambda x_2 + (1 - \lambda)\beta_1, \\
x_3(\lambda) &= \lambda x_3 + (1 - \lambda)\gamma_2, \\
x_4(\lambda) &= A_4(\lambda) x_4 + (1 - A_4(\lambda))\beta_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{l-1}(\lambda) &= A_{l-1}(\lambda) x_{l-1} + (1 - A_{l-1}(\lambda))\gamma_{\frac{l}{2}}
\end{aligned}$$

и заставим λ возрастать от 0 до 1; функции $A_i(\lambda)$ последовательно определяем требованием, чтобы

$$\left.\begin{aligned}
x_2^0(\lambda) &= A_4(\lambda) x_2^0 + (1 - A_4(\lambda))\beta_2, \\
x_3^0(\lambda) &= A_5(\lambda) x_3^0 + (1 - A_5'(\lambda))\gamma_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Так как с возрастанием λ от 0 до 1 $x_2(\lambda) = \lambda(x_2 - \beta_1) + \beta_1$ убывает от β_1 до x_2, то $x_2^0(\lambda)$ в то же время убывает от β_2 до x_2^0, т. е.

$$x_2^0(\lambda) = A_4(\lambda)(x_2^0 - \beta_2) + \beta_2 = A_4(\lambda) x_2^0 + (1 - A_4(\lambda))\beta_2,$$

где $A_4(\lambda)$ есть некоторая монотонно возрастающая от 0 до 1 непрерывная функция. Таким образом убеждаемся, что все функции $A_i(\lambda)$, последовательно определяемые равенствами (37), монотонно возрастают от 0 до 1. Отсюда следует, благодаря неравенствам (34), что при всех λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ соблюдаются также неравенства

$$x_2^0(\lambda) = A_4(\lambda)\,x_2^0 + (1 - A_4(\lambda))\,\beta_2 < A_4(\lambda)\,x_4 + (1 - A_4(\lambda))\,\beta_2 = x_4(\lambda)$$

и вообще при всех i $(1 < i \leqslant l - 3)$

$$x_i^0(\lambda) < x_{i+2}(\lambda). \qquad (34\,\text{bis})$$

Для $i = 1$ неравенство $x_1^0(\lambda) = x_1^0 < x_3(\lambda)$ очевидно, так как $x_3(\lambda) \geqslant x_3$. Но в таком случае, так как числа p_i, определенные из уравнений (35), при $\lambda = 0$ положительны, то они могли бы при изменении λ стать отрицательными только, получив значение 0 при некотором λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$.

Но это невозможно для коэффициентов $p_2, \ldots, p_{l-2}$, так как, благодаря (34 bis), между $x_i(\lambda)$ и $x_i^0(\lambda)$ $(1 \leqslant i \leqslant l - 3)$ имеется лишь одно значение $x_{i+1}(\lambda)$; поэтому, если бы p_{i+1} обратился в нуль (в то время как прочие коэффициенты не отрицательны), то между $x_i(\lambda_0)$ и $x_i^0(\lambda_0)$ не оказалось бы ни одной абсциссы, что противоречит следствию I. Точно так же не может быть $p_1 = 0$, так как тогда не осталось бы абсциссы между $(0, \gamma_1)$; $p_{l-1} = 0$ невозможно, так как не было бы абсциссы между $\beta_{\frac{l-2}{2}}$ и $\beta_{\frac{l}{2}} = 0$; $p_l = 0$ невозможно, так как не было бы абсциссы между $\gamma_{\frac{l}{2}}$ и $\gamma_{\frac{l+2}{2}}$.

Теорема, очевидно, останется в силе и в том случае, если некоторые из неравенств (33) или (34) заменить равенствами, и в частности, если $x_1 = -1$.

§ 5. Эту теорему применим для построения формул квадратур с положительными коэффициентами и рациональными абсциссами с возможно малым общим знаменателем N.

Положим $x_1 = -1$, тогда $x_1^0 = \beta_1$; поэтому, если N должен быть общим знаменателем абсцисс, возможно взять $x_3 = \beta_1 + \frac{\theta_1}{N}$, где $0 \leqslant \theta_1 < 1$; затем возьмем $x_5 = x_3^0 + \frac{\theta_3}{N}$, где $0 \leqslant \theta_3 < 1$ и т. д., $x_{l-1} = x_{l-3}^0 + \frac{\theta_{l-3}}{N}$, полагая для определенности l четным; нужно только, чтобы все эти x_k с нечетными значками $k \leqslant l - 1$ остались в соответствующих промежутках, а именно $\beta_{k-1} < x_{2k-1} < \gamma_k$.

Аналогично положим $x_2 = \gamma_1 + \frac{\theta_0}{N}$, где $0 \leqslant \theta_0 < 1$, $x_4 = x_2^0 + \frac{\theta_2}{N}$ $(0 \leqslant \theta_2 < 1)$ и т. д., $x_{l-2} = x_{l-4}^0 + \frac{\theta_{l-4}}{N}$ $(0 \leqslant \theta_{l-4} < 1)$, причем $\gamma_k < x_{2k} < \beta_k$.

Абсциссы x_{2i-1} и x_{2i-1}^0 с нечетными значками совпадают соответственно с корнями некоторой функции $F(x, a_i) = 0$ и переход от x_{2i-1}^0 к x_{2i+1} влечет за собой (по теореме I) уменьшение параметра a_i $(a_{i+1} < a_i)$. Наоборот, x_{2i} и x_{2i}^0 являются корнями $\Phi(x, a_i)$, и переход от x_{2i}^0 к x_{2i+2} соответствует увеличению a_i $(a_{i+1} > a_i)$.

Рассмотрим сначала четные абсциссы. На основании сказанного, для того чтобы последовательные замены абсцисс x_{2i}^0 абсциссами $x_{2i+2} = x_{2i}^0 + \frac{\theta_{2i}}{N}$ были приемлемы, необходимо и достаточно, чтобы они соответствовали некоторой возрастающей последовательности значений $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{\frac{l-2}{2}} \leqslant \infty$.

Но в промежутках (γ_k, β_k) зависимость между a и x определяется уравнением (4), т. е.

$$\frac{dx}{da} = \frac{1}{\frac{1}{1-x} + \frac{a[l(l+1)a+1]}{1+x}}. \tag{4 bis}$$

Поэтому

$$x_{2i+2} - x_{2i}^0 = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{\frac{1}{1-x} + \frac{a[al(l+1)+1]}{1+x}}, \tag{38}$$

и, принимая во внимание, что $\gamma_{i+1} \leqslant x_{2i}^0 < x_{2i+2} < 0$,

$$x_{2i+2} - x_{2i}^0 > \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{1 + \frac{a[al(l+1)+1]}{1+\gamma_{i+1}}}.$$

Но, как известно *,

$$1 + \gamma_i > 1 - \cos\frac{i\pi}{l+1} = 2\sin^2\frac{i\pi}{2(l+1)} > 2\left(\frac{i}{l+1}\right)^2.$$

Следовательно,

$$x_{2i+2} - x_{2i}^0 > \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{1 + \frac{a[al(l+1)+1](l+1)^2}{2(i+1)^2}} =$$

$$= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{1 + \frac{a}{2}\left(\frac{l+1}{i+1}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\frac{l(l+1)^3}{(i+1)^2}} >$$

$$> \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{\left[1 + \frac{a(l+1)^2}{\sqrt{2}(i+1)}\right]^2} = \frac{(i+1)\sqrt{2}}{(l+1)^2}\left[\frac{1}{1 + \frac{a_i(l+1)^2}{(i+1)\sqrt{2}}} - \frac{1}{1 + \frac{a_{i+1}(l+1)^2}{(i+1)\sqrt{2}}}\right] =$$

$$= \frac{2(i+1)^2}{(l+1)^2}\left[\frac{1}{(l+1)^2 a_i + (i+1)\sqrt{2}} - \frac{1}{(l+1)^2 a_{i+1} + (i+1)\sqrt{2}}\right]. \tag{39}$$

* Markoff A., Sur les racines de certaines équations, Mathematische Annalen, XXVII, 1886.

Таким образом, для того чтобы требуемые сдвиги были возможны, достаточно, чтобы N было настолько велико, что при всех $i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{l-4}{2}$, исходя из значения $a_0 = 0$, соответствующего γ_1, рекурентное уравнение

$$\frac{1}{(l+1)^2 a_{i+1} + (i+1)\sqrt{2}} = \frac{1}{(l+1)^2 a_i + (i+1)\sqrt{2}} - \frac{(l+1)^2 \theta_i'}{2(i+1)^2 N} \quad (40)$$

последовательно удовлетворяется положительными величинами a_{i+1}, каково бы ни было θ_i' $(0 < \theta_i' < 1)$.

Полагая $(l+1)^2 a_i = b_i\sqrt{2}$, запишем уравнение (40) в виде

$$\frac{1}{b_{i+1} + i + 1} = \frac{1}{b_i + i + 1} - \frac{(l+1)^2 \theta_i'}{(i+1)^2 N\sqrt{2}}. \quad (41)$$

Очевидно, что если уравнение

$$\frac{1}{B_{i+1} + i + 1} = \frac{1}{B_i + i + 1} - \frac{(l+1)^2}{(i+1)^2 N\sqrt{2}} \quad (42)$$

для данного $B_i \geqslant b_i \geqslant 0$ приводит к положительному значению B_{i+1}, то тем более будем иметь $B_{i+1} > b_{i+1} > b_i \geqslant 0$. Положим

$$N\sqrt{2} = \alpha(l+1)^2; \quad (43)$$

тогда уравнение (42) примет вид

$$\frac{1}{B_{i+1} + i + 1} = \frac{1}{B_i + i + 1} - \frac{1}{\alpha(i+1)^2} \quad (44)$$

или

$$B_{i+1} + i + 1 = \frac{\alpha(i+1)^2 (B_i + i + 1)}{\alpha(i+1)^2 - (B_i + i + 1)}. \quad (44\,\text{bis})$$

Так как $B_0 = 0$, то нам достаточно будет установить, для каких значений α из $0 \leqslant B_i \leqslant i$ следует, что и $0 \leqslant B_{i+1} \leqslant i + 1$, чтобы утверждать, что соответствующие им из формулы (43) значения N приемлемы.

Но из $B_i \geqslant 0$ следует $B_{i+1} > B_i$ (и тем более $B_{i+1} > 0$), если

$$B_i + i + 1 < \alpha(i+1)^2,$$

так что при условии $B_i \leqslant i$ достаточно, чтобы

$$\alpha > \frac{2i+1}{i+1},$$

т. е. чтобы $\alpha > 1$.

С другой стороны, при этом будем иметь

$$B_{i+1} \leqslant \frac{\alpha(i+1)^2(2i+1)}{\alpha(i+1)^2 - (2i+1)} - (i+1) =$$

$$= \frac{(i+1)[\alpha(i+1)i + 2i + 1]}{\alpha(i+1)^2 - (2i+1)} = (i+1)\left[1 + \frac{i(4-\alpha) + 2 - \alpha}{\alpha(i+1)^2 - (2i+1)}\right] < i + 1,$$

если $\alpha \geqslant 4$.

Аналогичным образом для абсцисс с нечетными индексами имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{da} = -\frac{1}{\frac{1}{1+x} + \frac{a[al(l+1)+1]}{1-x}},$$

откуда

$$x_{2i+1} - x_{2i-1}^0 = \int_{a_{i+1}}^{a_i} \frac{da}{\frac{1}{1+x} + \frac{a[al(l+1)+1]}{1-x}} >$$

$$> \int_{a_{i+1}}^{a_i} \frac{da}{\frac{1}{1+\beta_i} + a[al(l+1)+1]}, \tag{45}$$

так как

$$\beta_i < x_{2i-1}^0 < x_{2i+1} < 0.$$

Принимая во внимание, что

$$1 + \beta_i > 1 + \gamma_i > 2\left(\frac{i}{l+1}\right)^2,$$

имеем

$$\frac{1}{N} > x_{2i+1} - x_{2i-1}^0 > \int_{a_{i+1}}^{a_i} \frac{da}{\frac{(l+1)^2}{2i^2} + a + a^2 l(l+1)} >$$

$$> \int_{a_{i+1}}^{a_i} \frac{da}{(l+1)^2\left[\frac{1}{i\sqrt{2}} + a\right]^2} = \frac{1}{(l+1)^2}\left[\frac{1}{a_{i+1} + \frac{1}{i\sqrt{2}}} - \frac{1}{a_i + \frac{1}{i\sqrt{2}}}\right]. \tag{46}$$

В данном случае нужно, чтобы положительные числа a_i с возрастанием i шли убывая от $a_1 = \infty$. Полагая попрежнему

$$N\sqrt{2} = \alpha(l+1)^2, \tag{43}$$

покажем, что, каковы бы ни были числа $\alpha_i \geqslant 4$, последовательность чисел a_i, определяемых уравнением

$$\frac{1}{a_{i+1}\sqrt{2} + \frac{1}{i}} = \frac{1}{a_i\sqrt{2} + \frac{1}{i}} + \frac{1}{\alpha_i}, \tag{47}$$

положительна. Очевидно, что это будет доказано, если мы убедимся, что значения $a_i > 0$, если заменить в уравнении (47) α_i некоторыми определенными числами $\delta_i \leqslant 4$, так как с увеличением α_i при неизменном или увеличенном a_i увеличивается также a_{i+1}. Но заменяя в (47) α_i через $\frac{2(2i-1)}{i}$, видим, что уравнению

$$\frac{1}{y_{i+1}\sqrt{2} + \frac{1}{i}} = \frac{1}{y_i\sqrt{2} + \frac{1}{i}} + \frac{i}{2(2i-1)}$$

удовлетворяет

$$y_i\sqrt{2} = \frac{1}{i-1} \quad (y_1 = \infty).$$

Следовательно,

$$a_i \geqslant \frac{1}{(i-1)\sqrt{2}} > 0.$$

Таким образом, при всяком целом

$$N > 2\sqrt{2}(l+1)^2 \tag{48}$$

возможно построить симметричную формулу квадратур для отрезка $(-1, +1)$ (31) *с положительными коэффициентами и с рациональными абсциссами* x_i, *имеющими общий знаменатель* N, *точную для всех многочленов степени* $2l-1$. Напротив, как показано в моей статье *, такая формула невозможна, если наибольший знаменатель n абсцисс, который может и не быть общим знаменателем, удовлетворяет неравенству

$$n \leqslant \frac{(l-1)(l+3)}{8}.$$

Для дальнейшего полезно будет заметить, что, вместо того чтобы брать в качестве исходного значения $x_1 = -1$, можно также положить $x_1 = -1 + \frac{\theta}{N}$, где попрежнему $N > 2\sqrt{2}(l+1)^2$ $(0 < \theta \leqslant 1)$. В таком случае уже не будет $a_1 = \infty$, но из уравнения $P_l(x_1) + a_1(x_1+1)P_l'(x_1) = 0$ имеем

$$a_1 = -\frac{P_l(x_1)}{P_l'(x_1)(x_1+1)} > \frac{2 - l(l+1)(x_1+1)}{l(l+1)(x_1+1)} >$$

$$> \frac{2 - \dfrac{l}{2\sqrt{2}(l+1)}}{\dfrac{l}{2\sqrt{2}(l+1)}} = 4\sqrt{2} - 1 + \frac{4\sqrt{2}}{l} > 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, нужно лишь проверить, что если попрежнему в уравнении (47) $\alpha_i \geqslant 4$ $(i \geqslant 1)$, то значение $a_i > 0$ при всех $i > 1$, если $a_1 \geqslant 3\sqrt{2}$ при $i = 1$. Для этого замечаем, что $y_i\sqrt{2} = \dfrac{1}{i - \frac{5}{6}}$ (где $y_1 = 3\sqrt{2}$) удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{y_{i+1}\sqrt{2} + \frac{1}{i}} - \frac{1}{y_i\sqrt{2} + \frac{1}{i}} = \frac{36i^2}{(12i+1)(12i-5)} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{12i}\right)\left(1 - \frac{5}{12i}\right)} > \frac{1}{4},$$

---

* «О формуле квадратур Котеса и Чебышева», ДАН, XIV, № 6, 1937.

поэтому

$$a_i > \frac{1}{\left(i-\frac{5}{6}\right)\sqrt{2}} \qquad (\text{при } i > 1).$$

§ 6. ТЕОРЕМА VI. *Если положительные числа* $p_1, p_2, \ldots, p_{2l-1}$ *удовлетворяют условию* $\sum_{i=1}^{2l-1} p_i = 2$, *причем* $p_i = p_{2l-i}$, *и, полагая* $\sum_{i=1}^{h} p_i = \pi(x_h)$, *где* $0 < h < l$, *имеем*

$$\begin{gathered} 0 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant x_2 < \ldots \leqslant \beta_{k-1} \leqslant x_{2k-1} < \\ < \gamma_k \leqslant \ldots < x_{l-2} \leqslant \beta_{\frac{l-2}{2}} \leqslant x_{l-1} \leqslant \gamma_{\frac{l}{2}} \end{gathered} \tag{33}$$

(*для определенности предполагаем* l *четным*); *если, кроме того,*

$$x_i^0 \leqslant x_{i+2}, \tag{34 bis}$$

то существует формула квадратур

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{l-1} p_i\,[f(y_i) + f(-y_i)] + p_l f(0), \tag{49}$$

точная для всех многочленов степени $2l-1$, *где*

$$x_1 \leqslant y_1 \leqslant \gamma_1, \quad x_h \leqslant y_h \leqslant x_{h-1}^0 \quad (1 < h < l). \tag{50}$$

Заметим сначала, что если формула (49) возможна, то неравенства (50) должны быть соблюдены, так как вследствие (14) и (14 bis) имеем

$$\pi(x_h) = \sum^{x \leqslant y_h} p_i \leqslant \pi(y_h), \quad \text{откуда} \quad x_h \leqslant y_h,$$

и, с другой стороны, вследствие (16), должно быть

$$\sum^{x \leqslant x_{h-1}^0} p_i > \pi(x_{h-1}) = \sum^{x < y_h} p_i = \sum^{i=h-1} p_i,$$

а поэтому невозможно, чтобы $y_h > x_{h-1}^0$.

При этом знаки равенства в (50) невозможны, если их нет в условиях (33) и (34 bis).

Для доказательства поступим так же, как в теореме V. Величины y_i $(i = 1, \ldots, l-1)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{i=1}^{l-1} p_i y_i^{2k} = \frac{1}{2k+1} \qquad (k = 1, \ldots, l-1). \tag{51}$$

Вводя вспомогательный параметр λ в коэффициенты p_i, поло-

жим $p_i(1) = p_i$, $x_i(1) = x_i$, и допустив, что нам известна некоторая формула (49) с коэффициентами $p_i^0 > 0$, которым соответствуют значения $x_i(0)$, удовлетворяющие условиям теоремы (с неравенствами в узком смысле слова, если для x_i не исключаются также и соответствующие равенства), положим $p_i(0) = p_i^0$.

Как было показано, параметр λ можно ввести так, чтобы точки $x_i(\lambda)$ при всех значениях $0 \leqslant \lambda < 1$ удовлетворяли (в узком смысле) условиям (33) и (34 bis). Но в таком случае из уравнений (51) $y_i(\lambda)$ определятся как однозначные вещественные аналитические функции λ, лишь бы только ни при каком значении $\lambda = \lambda_0$ некоторые из значений $y_i(\lambda)$ не становились равными между собой. Однако, благодаря неравенствам

$$y_h(\lambda) < x_{h-1}^0(\lambda) < x_{h+1}(\lambda) < y_{h+1}(\lambda),$$

соседние значения $y_h(\lambda)$ и $y_{h+1}(\lambda)$ не могут совпасть.

Таким образом, остается лишь сконструировать какую-нибудь определенную формулу квадратур, удовлетворяющую условиям теоремы. Возможно, что путь, который мы предлагаем для этого, может быть упрощен, но не совсем бесполезно проделать его, чтобы одновременно выявить, в чем заключается принципиальная трудность построения формул квадратур по заданным коэффициентам.

Для этого положим

$$x_1 \leqslant \gamma_1,\ x_2 = \beta_1,\ x_3 = \gamma_2, \ldots, x_{l-2} = \beta_{\frac{l-2}{2}},\ x_{l-1} = \gamma_{\frac{l}{2}}.$$

Соответствующие им значения абсцисс

$$\left.\begin{aligned} y_1 = \gamma_1 - \Delta_1, \quad y_2 = \gamma_2 - \Delta_2, \quad y_3 = \gamma_2 + \Delta_2', \ldots, \\ y_{l-2} = \gamma_{\frac{l}{2}} - \Delta_{\frac{l}{2}}, \quad y_{l-1} = \gamma_{\frac{l}{2}} + \Delta_{\frac{l}{2}}' \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

должны удовлетворять $l-1$ уравнениям $(h = 1, 2, \ldots, l-1)$

$$[\rho(\gamma_1) - \varepsilon][\gamma_1 - \Delta_1]^{2h} + (p_2 + \varepsilon)(\gamma_2 - \Delta_2)^{2h} + [\rho(\gamma_2) - p_2](\gamma_2 + \Delta_2')^{2h} + \ldots + p_{\frac{l}{2}}[\gamma_{\frac{l}{2}} - \Delta_{\frac{l}{2}}]^{2h} + [\rho(\gamma_{\frac{l}{2}}) - p_{\frac{l}{2}}][\gamma_{\frac{l}{2}} + \Delta_{\frac{l}{2}}']^{2h} = \frac{1}{2h+1}, \tag{53}$$

где

$$\varepsilon = \rho(\gamma_1) - \rho(x_1), \quad p_2 = \pi(\beta_1) - \pi(\gamma_1),$$
$$p_3 = \pi(\beta_2) - \pi(\gamma_2), \ldots, p_{\frac{l}{2}} = \pi(\beta_{\frac{l-2}{2}}) - \pi(\gamma_{\frac{l-2}{2}});$$

при этом, если $x_1 = \gamma_1$, то $\varepsilon = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_2' = \ldots = \Delta_{\frac{l}{2}} = \Delta_{\frac{l}{2}}' = 0$. Если же $x_1 < \gamma_1$, т. е. $\varepsilon > 0$, то, так как в случае вещественности решений системы (53) согласно (50)

$$x_1 < y_1 < \gamma_1; \quad \beta_1 < y_2 < x_1^0 < \gamma_2 < y_3 < \beta_2 < \ldots < y_{l-1} < \gamma_{\frac{l}{2}} < y_{l-1},$$

необходимо, чтобы $\Delta_i > 0$, $\Delta_i' > 0$.

Таким образом, нам нужно лишь показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ система (53) имеет вещественные решения. В виду того что функциональный определитель системы (53) функций Δ_i и Δ_i' переменной ε равен 0 при $\varepsilon = 0$, мы должны положить $\varepsilon = t^2$, $\Delta_1 = t^2 z(t)$, $\Delta_i = t v_i(t)$, $\Delta_i' = \frac{p_i t v_i(t) + t^2 u_i(t)}{\rho(\gamma_i) - p_i}$ и рассматривать $l - 1$ функций $z(t)$, $v_i(t)$, $u_i(t)$ $\left(i = 2, 3, \ldots, \frac{l}{2}\right)$ переменной t при $t \geqslant 0$. В таком случае, вычитая из уравнений (53) уравнения, соответствующие $t = 0$, получим

$$\varepsilon[(\gamma_2 - \Delta_2)^{2h} - (\gamma_1 - \Delta_1)^{2h}] + \rho(\gamma_1)[(\gamma_1 - \Delta_1)^{2h} - \gamma_1^{2h}] +$$
$$+ \rho(\gamma_2)[(\gamma_2 + \Delta_2')^{2h} - \gamma_2^{2h}] + p_2[(\gamma_2 - \Delta_2)^{2h} - (\gamma_2 + \Delta_2')^{2h}] + \ldots +$$
$$+ \rho(\gamma_{\frac{l}{2}})[(\gamma_{\frac{l}{2}} + \Delta_{\frac{l}{2}}')^{2h} - \gamma_{\frac{l}{2}}^{2h}] + p_{\frac{l}{2}}[(\gamma_{\frac{l}{2}} - \Delta_{\frac{l}{2}})^{2h} - (\gamma_{\frac{l}{2}} + \Delta_{\frac{l}{2}}')^{2h}] = 0. \quad (54)$$

Замечая, что

$$\rho(\gamma_i)\Delta_i' - p_i(\Delta_i + \Delta_i') = t^2 u_i(t),$$
$$\rho(\gamma_i)\Delta_i'^2 - p_i(\Delta_i'^2 - \Delta_i^2) = \frac{(p_i t v_i(t) + t^2 u_i(t))^2}{\rho(\gamma_i) - p_i} + p_i t^2 v_i^2(t)$$

содержат множитель t^2, видим, что все уравнения (54) по разделении на t^2 могут быть записаны в виде

$$\gamma_2^{2h} - \gamma_1^{2h} - 2h\rho(\gamma_1)\gamma_1^{2h-1} z + 2h\gamma_2^{2h-1} u_2 +$$
$$+ h(2h-1)\frac{p_2\rho(\gamma_2)}{\rho(\gamma_2) - p_2}\gamma_2^{2h-2} v_2^2 + \ldots + 2h\gamma_{\frac{l}{2}}^{2h-1} u_{\frac{l}{2}} +$$
$$+ h(2h-1)\frac{p_{\frac{l}{2}}\rho(\gamma_{\frac{l}{2}})}{\rho(\gamma_{\frac{l}{2}}) - p_{\frac{l}{2}}}\gamma_{\frac{l}{2}}^{2h-2} v_{\frac{l}{2}}^2 = t\varphi_h(t, z, u_2, \ldots, v_{\frac{l}{2}}), \quad (55)$$

где φ_h — многочлен относительно входящих в него переменных. Поэтому, так как определитель $(l-1)$-го порядка, составленный из коэффициентов при z, u_2, $v_2^2, \ldots, v_{\frac{l}{2}}^2$, отличен от нуля, то, полагая

$$z = z_0 + Z, \quad u_i = a_i + U_i, \quad v_i = c_i + V_i,$$

где $l - 1$ постоянных z_0, a_i, c_i^2 удовлетворяют $l - 1$ линейным уравнениям

$$\gamma_2^{2h} - \gamma_1^{2h} - 2h\rho(\gamma_1)\gamma_1^{2h-1} z_0 + 2h\gamma_2^{2h-1} a_2 + h(2h-1)\frac{p_2\rho(\gamma_2)}{\rho(\gamma_2) - p_2}\gamma_2^{2h-2} c_2^2 +$$
$$+ \ldots + 2h\gamma_{\frac{l}{2}}^{2h-1} a_{\frac{l}{2}} + h(2h-1)\frac{p_{\frac{l}{2}}\rho(\gamma_{\frac{l}{2}})}{\rho(\gamma_{\frac{l}{2}}) - p_{\frac{l}{2}}}\gamma_{\frac{l}{2}}^{2h-2} c_{\frac{l}{2}}^2 = 0, \quad (56)$$

мы получим $2^{\frac{l}{2}-1}$ решений системы (55), разлагающихся по степеням $t = \sqrt{\varepsilon}$ при t достаточно близком к нулю. Однако, соответствующие значения Δ_i, Δ_i' должны быть, кроме того, вещественны и положительны: для этого достаточно убедиться, что значения c_i^2,

получаемые из уравнений (56), положительны, и тогда, для того чтобы $\Delta_i > 0$, $\Delta_i' > 0$ при $t > 0$, нужно будет взять все $c_i > 0$, после чего искомое решение определится однозначно. С этой целью заметим, что определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (56), равен произведению множителя

$$-\frac{\rho(\gamma_1)\ldots\rho(\gamma_{\frac{l}{2}})p_2\ldots p_{\frac{l}{2}}}{(\rho(\gamma_2)-p_2)\ldots(\rho(\gamma_{\frac{l}{2}})-p_{\frac{l}{2}})}$$

на определитель H, приведенный на стр. 500.

Для получения c_i^0 нужно составить определитель H_i, заменив элементы $(2i-1)$-ой колонны через $\gamma_1^{2h}-\gamma_2^{2h}$; вместо этого заменим в определителе H соответствующие элементы через $2hx^{2h-1}$. Полученный определитель $H_i(x)$ представит многочлен $(2l-3)$-ей степени относительно x, который будет иметь простыми корнями 0, $\pm\gamma_1$, $\pm\gamma_i$ и остальные $l-4$ значения $\pm\gamma_2, \ldots, \pm\gamma_{i-1}, \pm\gamma_{i+1}, \ldots, \pm\gamma_{\frac{l}{2}}$ будет иметь двойными корнями. Таким образом,

$$H_i(x) = \frac{(2l-2)\,x\,(x^2-\gamma_1^2)^2\ldots(x^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^2}{(x^2-\gamma_1^2)\,(x^2-\gamma_i^2)} \times$$

$$\times\begin{vmatrix} 2\gamma_1 & \ldots & 2\gamma_i & 2\gamma_{i+1} & \ldots & 2\gamma_{\frac{l}{2}} & 2 \\ 4\gamma_1^3 & \ldots & 4\gamma_i^3 & 4\gamma_{i+1}^3 & \ldots & 4\gamma_{\frac{l}{2}}^3 & 6\gamma_{\frac{l}{2}}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2l-4)\gamma_1^{2l-5} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & (l-2)(2l-5)\gamma_{\frac{l}{2}}^{2l-6} \end{vmatrix} =$$

$$= 2^{l-1}(l-1)!\,\gamma_1\gamma_2^3\ldots\gamma_{\frac{l}{2}}^3(\gamma_1^2-\gamma_2^2)^2\ldots$$

$$\ldots(\gamma_1^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^2(\gamma_i^2-\gamma_2^2)^2\ldots(\gamma_i^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^2(\gamma_2^2-\gamma_3^2)^4\ldots$$

$$\ldots(\gamma_{\frac{l-2}{2}}^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^4\,\frac{x\,(x^2-\gamma_1^2)^2\ldots(x^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^2}{\gamma_i^2(\gamma_i^2-\gamma_1^2)\,(x^2-\gamma_1^2)\,(x^2-\gamma_i^2)}.$$

Следовательно,

$$\frac{H_i(x)}{H} = \frac{x(x^2-\gamma_1^2)^2\ldots(x^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^2}{\gamma_i^2(\gamma_i^2-\gamma_1^2)(\gamma_i^2-\gamma_2^2)^2\ldots(\gamma_i^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^2(x^2-\gamma_1^2)\,(x^2-\gamma_i^2)} =$$

$$= \frac{-4\,xP_l^2(x)\,(\gamma_1^2-\gamma_i^2)}{P_l'^2(\gamma_i)\,(x^2-\gamma_1^2)\,(x^2-\gamma_i^2)}.$$

Откуда

$$\frac{H_i}{H} = \int\limits_{\gamma_2}^{\gamma_1}\frac{H_i(x)}{H}\,dx = \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{4\,(\gamma_1^2-\gamma_i^2)\,x\,P_l^2(x)\,dx}{P_l'^2(\gamma_i)\,(x^2-\gamma_1^2)\,(x^2-\gamma_i^2)} > 0.$$

$$H = \begin{vmatrix} 2\gamma_1 & 2\gamma_2 & 2 & \dots & 2\gamma_{\frac{l}{2}} & 2 \\ 4\gamma_1^3 & 4\gamma_2^3 & 6\gamma_2^2 & \dots & 4\gamma_{\frac{l}{2}}^3 & 6\gamma_{\frac{l}{2}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2h\gamma_1^{2h-1} & 2h\gamma_2^{2h-1} & h(2h-1)\gamma_2^{2h-2} & \dots & 2h\gamma_{\frac{l}{2}}^{2h-1} & h(2h-1)\gamma_{\frac{l}{2}}^{2h-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2l-2)\gamma_1^{2l-3} & (2l-2)\gamma_2^{2l-3} & (l-1)(2l-3)\gamma_2^{2l-4} & \dots & (2l-2)\gamma_{\frac{l}{2}}^{2l-3} & (l-1)(2l-3)\gamma_{\frac{l}{2}}^{2l-4} \end{vmatrix} =$$

$$= (2l-2)\gamma_1(\gamma_1^2-\gamma_2^2)^2 \dots (\gamma_1^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^2 \begin{vmatrix} 2\gamma_2 & 2 & \dots & 2\gamma_{\frac{l}{2}} & 2 \\ 4\gamma_2^3 & 6\gamma_2^2 & \dots & 4\gamma_{\frac{l}{2}}^3 & 6\gamma_{\frac{l}{2}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2l-4)\gamma_2^{2l-5} & (l-2)(2l-5)\gamma_2^{2l-6} & \dots & (2l-4)\gamma_{\frac{l}{2}}^{2l-5} & (l-2)(2l-5)\gamma_{\frac{l}{2}}^{2l-6} \end{vmatrix} =$$

$$= 2^{l-1}(l-1)!\,\gamma_1\gamma \dots \gamma_{\frac{l}{2}}^3(\gamma_1^2-\gamma_2^2)^2 \dots (\gamma_1^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^2(\gamma_2^2-\gamma_3^2)^4 \dots (\gamma_2^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^4 \dots (\gamma_{\frac{l-2}{2}}^2-\gamma_{\frac{l}{2}}^2)^4.$$

Следовательно,

$$c_i^2 = \frac{\rho(\gamma_i) - p_i}{p_i \rho(\gamma_i)} \cdot \frac{H_i}{H} > 0.$$

После того как построена формула квадратур (49), соответствующая значениям $x_1 < \gamma_1, x_2 = \beta_1, \ldots, x_{l-1} = \gamma_{\frac{l}{2}}$ и приводящая к $l-1$ различным значениям y_i, мы можем, как было указано в начале доказательства, построить любую формулу (49), где x_i удовлетворяют неравенствам в узком смысле, а затем, исходя из последней, построить также и формулы, где неравенства (33) и (34 bis) соблюдены в широком смысле (т. е. с возможностью знаков равенства).

§ 7. Используем теперь доказанную теорему для формул квадратур, точных для многочленов $(2l-1)$-ой степени

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\Big[\sum_{i=1}^{l-1} A_i(f(y_i) + f(-y_i)) + A_0 f(0)\Big], \qquad (57)$$

где целые числа $A_i \geqslant 0$ и n связаны равенством

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{l-1} A_i = n.$$

Полагаем

$$\pi(x_1) = \frac{A_1}{n}, \quad \pi(x_2) = \frac{A_1 + A_2}{n}, \quad \pi(x_i) = \frac{A_1 + \ldots + A_i}{n};$$

достаточно, чтобы

$$\frac{2}{l(l+1)} \leqslant \frac{A_1}{n} \leqslant \rho(\gamma_1) \leqslant \frac{A_1 + A_2}{n} \leqslant \pi(\beta_1) \leqslant \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A_1 + \ldots + A_{2k}}{n} \leqslant \pi(\beta_k) \leqslant \frac{A_1 + \ldots + A_{2k+1}}{n} < \ldots$$

при условии, что $x_{i-1}^0 \leqslant x_{i+1}$. Следовательно, после того как x_{i-1} дано, x_{i+1} можно определить из равенства

$$\pi(x_{i+1}) = \pi(x_{i-1}^0) + \frac{\theta_i}{n},$$

где $0 \leqslant \theta_i < 1$. Но принимая во внимание, что все рассматриваемые здесь значения $x_i < 0$, из неравенства (22) заключаем, что

$$\frac{\pi(x_{i+1}) - \pi(x_{i-1}^0)}{x_{i+1} - x_{i-1}^0} > 2 - \pi(0).$$

Но $\pi(0) = 2 - \pi(0) + \rho(0)$; поэтому

$$x_{i+1} - x_{i-1}^0 < \frac{\pi(x_{i+1}) - \pi(x_{i-1}^0)}{1 - \frac{1}{2}\rho(0)} < \frac{1}{n\left(1 - \frac{1}{2}\rho(0)\right)}.$$

Таким образом, применяя результаты § 5, вследствие (48) требуемое построение будет возможно выполнить, если

$$n\left(1-\frac{1}{2}\rho(0)\right)>2\sqrt{2}(l+1)^2.$$

Но принимая во внимание формулы (28), имеем для l нечетного

$$\rho(0)=2\left[\frac{2\cdot 4\ldots(l-1)}{1\cdot 3\ldots l}\right]^2<\frac{6}{l+4}\quad(l\geqslant 5),\tag{58}$$

так как $\left(\frac{l-1}{l}\right)^2<\frac{l+2}{l+4}$, и при $l=5$ неравенство (58) соблюдается; а для l четного

$$\rho(0)=\frac{2}{l(l+1)}\left[\frac{2\cdot 4\ldots l}{1\cdot 3\ldots(l-1)}\right]^2<\frac{6}{l+4}\quad(l\geqslant 4),\tag{58 bis}$$

так как $\frac{(l-1)(l-2)}{l(l+1)}\cdot\left(\frac{l}{l-1}\right)^2=\frac{l(l-2)}{l^2-1}<\frac{l+2}{l+4}$, и при $l=4$ неравенство (58 bis) соблюдается.

Следовательно, для построения формулы (57) достаточно, чтобы

$$n>2\sqrt{2}(l+1)(l+4).\tag{59}$$

С другой стороны, как было показано в упомянутой статье, для того чтобы формула (57) была возможна, необходимо, чтобы

$$n>\frac{l\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\pi\sqrt{6}}.$$

В действительности величина знаменателя может быть еще уменьшена; но для этого необходимо для каждого определенного значения l заменить общие неравенства непосредственными вычислениями. Таким образом, можно, например, убедиться, что для многочленов 13-ой степени ($l=7$) возможна формула

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{6}A_i[f(x_i)-f(-x_i)]+\frac{3}{10}f(0),$$

где

$$A_1=1,\quad A_2=2,\quad A_3=3,\quad A_4=3,\quad A_5=4,\quad A_6=4.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
29. V. 1937.

S. BERNSTEIN. SUR LES FORMULES DE QUADRATURE À COEFFICIENTS POSITIFS

RÉSUMÉ

Le présent mémoire contient une étude systematique des conditions necessaires et des conditions suffisantes auquelles doivent satisfaire les abscisses d'une formule de quadrature

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \qquad (-1 \leqslant x_i \leqslant 1) \tag{I}$$

applicable à tous les polynômes de degré $2l-1$ pour que les coefficients p_i soient non négatifs. Ces résultats sont ensuite appliqués à la démonstration des théorèmes suivants:

A. Quel que soit le nombre $N > 2\sqrt{2}(l+1)^2$, *il est possible de construire des formules de quadrature* (I) (*à coefficients non negatifs*) *dont toutes les abscisses* $x_i = \frac{m_i}{N}$ *sont des nombres rationnels ayant N comme dénominateur commun.*

B. Quel que soit le nombre $N_1 > 2\sqrt{2}(l+1)(l+4)$ *il est possible de construire des formules* (I) *dont tous les coefficients* $p_i = \frac{m_i}{N_1}$ *sont des nombres positifs rationnels ayant le même dénominateur* N_1.

Au contraire des formules (I) sont impossibles avec

$$N_1 < \frac{l\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\pi\sqrt{6}} \text{ ou avec } N < \frac{(l-1)(l+3)}{8}.$$

Les principaux résultats sont exposés dans deux notes des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences: 1° Sur les formules de quadrature à coefficients non négatifs et abscisses équidistantes; 2° Modifications de la formule de quadrature de Tchebycheff, t. 204, pp. 1294 et 1526.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

И. М. ВИНОГРАДОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНА ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО АРГУМЕНТ ПРОБЕГАЕТ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Статья посвящена изучению распределения дробных частей многочлена, когда аргумент пробегает простые числа некоторой арифметической прогрессии.

В моей работе «Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел» * дана общая теорема, характеризующая, при некоторых ограничениях, распределение дробных частей многочлена

$$\alpha p^n + \ldots + \alpha_n,$$

когда p пробегает простые числа.

В настоящей работе дается обобщение этого результата на случай, когда p пробегает простые числа некоторой арифметической прогрессии.

Леммы, которыми я пользуюсь в настоящей работе, те же самые, что и в работе, указанной выше. Поэтому эти леммы я привожу без доказательств, лишь несущественно изменив их формулировки:

Обозначения. θ вещественное; $|\theta| \leqslant 1$. При вещественном z полагаем

$$\{z\} = z - [z]; \quad (z) = \min\Big(\{z\}\,;\, 1 - \{z\}\Big).$$

n целое постоянное > 1; $\nu = \frac{1}{n}$.

$c, c_1, \ldots, h, h_1, \ldots$ положительные постоянные.

При $B > 0$ обозначения

$$A \ll B; \quad B \gg A; \quad A = O(B)$$

показывают, что $|A|$ не превосходит произведения B на некоторое постоянное.

* Труды Тбилисского математического института, т. III, 1937.

N_0 целое $\geqslant c_0$, где c_0 достаточно велико;

$$N = N_0^n; \quad \mu = \log N; \quad \tau = N\mu^{-h};$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}; \quad (a, q) = 1; \quad \mu^h \leqslant q \leqslant \tau;$$

r целое; $0 < r \leqslant \mu^{h_5}$; $(r, s) = 1$; $0 \leqslant s < r$;
p пробегает простые числа.

ЛЕММА 1. *Пусть k и l целые;*

$$0 < k \leqslant \mu^{h_4}; \quad 0 < l \leqslant \mu^{h_6}; \quad N_1 = \frac{N_0}{l};$$

$f(x) = \alpha l^n x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *вещественные;*

$$S = \sum_{x=1}^{N_1} e^{2\pi i k f(x)}.$$

Тогда, при любом

$$h_1 \geqslant 2^{3n-3},$$

имеем

$$S \ll N_1 \Delta_1^{2^{-n+1}}; \quad \Delta_1 = kl^n \mu^{-h_1} + \frac{kl^n \mu^{h_1+1}}{\min(N_1, \mu^h)}.$$

ЛЕММА 2. *Пусть k и l целые;*

$$0 < k \leqslant \mu^{h_4}; \quad 0 < l \leqslant \mu^{h_6}; \quad N_1 = \frac{N_0}{l}; \quad 0 \leqslant N' \leqslant N_1;$$

$f(x) = \alpha l^n x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *вещественные;*

$$S = \sum_d \sum_m e^{2\pi i k f(dm)},$$

где $\mathbf{d}$ *пробегает числа некоторой последовательности* (d) *с условием*

$$D < d \leqslant D'; \quad 1 < D < N_1; \quad D' \leqslant 2D$$

и m, *при каждом данном* d, *пробегает числа некоторой последовательности* (m) *с условием*

$$\frac{N'}{d} < m \leqslant \frac{N_1}{d}.$$

Тогда, при любом

$$h_2 \geqslant 2^{6n-3},$$

имеем

$$S \ll N_1 \Delta^{2^{-2n}}; \quad \Delta = \frac{1}{D} + kl^n \mu^{-h_2} + \frac{kl^n \mu^{h_2+1}}{\min\left(\frac{N_1}{D}; \mu^h\right)}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть k целое; $0 < k \leqslant \mu^{h_4}$; $f(x) = \alpha x^n + \ldots + \alpha_n$; $\alpha, \ldots, \alpha_n$ вещественные;*

$$S = \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p = rx + s}} e^{2\pi i k f(p)}.$$

Тогда при любом положительном постоянном h_0 *и при условии*

$$h \geqslant (2n+1)\max[2^{2^n}(2h_0+2h_5+4)+2h_4+1;\quad 2^{6n-2}+1]$$

имеем

$$S \ll N_0\mu^{-h_0}.$$

Доказательство. 1° Пусть H обозначает произведение всех простых чисел $\leqslant \sqrt{N}$; (d) обозначает последовательность делителей числа H; (d_0) часть этой последовательности, содержащую числа с четным числом простых делителей; (d_1) часть той же последовательности, содержащую числа с нечетным числом простых делителей; (d') часть (d), содержащую числа, наибольший простой делитель которых $> \mu^{h''}$; (d'') часть (d), содержащую числа, наибольший простой делитель которых $\leqslant \mu^{h''}$. Соответственно подразделению (d) на (d') и (d'') вводим также обозначения:

$$(d_0'); \; (d_0''); \; (d_1'); \; (d_1'').$$

2° Применяя известную формулу, находим

$$S''' = \sum_{d \leqslant N_0} \mu(d) S_d; \quad S_d = \sum_{\substack{0<m\leqslant \frac{N_0}{d} \\ dm=rx+s}} e^{2\pi i k f(dm)},$$

где S''' есть сумма, содержащая все слагаемые суммы S с условием $p > \sqrt{N_0}$ и, если среди чисел прогрессии $rx+s$ имеется 1, также

$$e^{2\pi i k f(1)}.$$

А так как число простых чисел $\leqslant \sqrt{N_0}$ будет $< \sqrt{N_0}$, то имеем

$$S = \sum_{d \leqslant N_0} \mu(d) S_d + O(\sqrt{N_0}). \tag{1}$$

3° Сначала мы оценим лишь сумму

$$S_0 = \sum_{d \leqslant d_0} \mu(d) S_d; \quad d_0 = \mu^{h_0'}.$$

Пусть m_0 обозначает число с условием

$$dm_0 \equiv s \pmod{r}; \quad 0 \leqslant m_0 < r.$$

Тогда S_d можно представить в форме

$$S_d = \sum_t e^{2\pi i k f[d(m_0+rt)]},$$

где при некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_n$

$$f[d(m_0+rt)] = \alpha d^n r^n t^n + \beta_1 t^{n-1} + \ldots + \beta_n,$$

причем t пробегает все целые числа с условием

$$-\frac{m_0}{r} < t \leqslant \frac{\frac{N_0}{d} - m_0}{r}.$$

Сумма S_d изменится на величину $\ll 1$, если мы эти границы для t заменим такими:

$$0 < t \leqslant \frac{N_0}{rd}.$$

Поэтому, применяя лемму 1, найдем

$$S_d \ll \frac{N_0}{rd} \Delta_1^{2^{-n+1}}; \quad \Delta_1 = k r^n d^n \mu^{-h_1} + k r^n d^n \mu^{h_1+1-h}; \quad h_1 \geqslant 2^{3n-3}$$

и потому

$$S_0 \ll \sum_{d \leqslant d_0} |S_d| \ll N_0 (\mu^{h_4+nh'_0-h_1} + \mu^{h_4+nh'_0+h_1+1-h})^{2^{-n+1}}. \tag{2}$$

4° Теперь оценим сумму

$$S' = \sum_{d_0 < d \leqslant N_0} \mu(d) S_d.$$

Эту сумму мы представим в форме

$$S' = T_0 - T_1; \quad T_0 = \sum_{(d_0)} S_d - \sum_{(d_1)} S_d, \tag{3}$$

где суммирование распространяется лишь на значения d в пределах

$$d_0 < d \leqslant N_0.$$

Достаточно оценить лишь T_0, так как T_1 оценивается совершенно аналогичным способом.

5° Сначала оценим часть T'_0 суммы T_0, отвечающую условиям

$$d_0 < d \leqslant d_1; \quad d_1 = N\mu^{-h'}; \quad h' \leqslant h.$$

Интервал

$$d_0 < d \leqslant d_1$$

можно подразделить на $\ll \mu$ интервалов вида

$$D < d \leqslant D'; \quad D' \leqslant 2D; \quad d_0 \leqslant D < d_1.$$

И мы оценим часть Ω суммы T'_0, отвечающую одному такому интервалу. Имеем

$$\Omega = \sum_{d} \sum_{m} e^{2\pi i k f(dm)},$$

где d пробегает числа последовательности (d_0) с условием

$$D < d \leqslant D'; \quad D' \leqslant 2D; \quad d_0 \leqslant D < d_1$$

В дальнейшем мы будем считать число i настолько большим, чтобы для соответствующего значения r выполнялось неравенство

$$r-1>j_x. \tag{4,61}$$

Если r удовлетворяет неравенству (4, 60) и если $j=r$ или $j=r-1$, то на основании (4, 61) и (4, 57) $x \subset G_j''$, а в таком случае, сопоставляя (4, 58), (4, 50), (4, 59) и (4, 55), будем иметь:

$$\sigma_{ij} \leqslant L_j \cdot \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j'} |\alpha_{ik}| + \varepsilon_j(x) \cdot \sum_{k=\mu_j'+1}^{\mu_{j+1}} |\alpha_{ik}|. \tag{4,62}$$

Принимая во внимание определение чисел γ_i [равенство (1, 4)], условие 2° (определение методов T') и первое неравенство (4, 4), мы можем написать:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x) &\leqslant L_j\gamma_i(\mu_j'-\mu_j)+M\cdot\varepsilon_j(x)\leqslant \\ &\leqslant L_r\gamma_i(\mu_j'-\mu_j)+M\cdot\varepsilon_j(x),\end{aligned} \tag{4,63}$$

где M есть постоянное положительное число, которое входит в условие 2°. Далее, из равенств (4, 6), (4, 11), из неравенства (4, 60) и из первого неравенства (4, 9) мы получим:

$$\gamma_i \leqslant \gamma'_{\lambda_r}, \quad \mu_j'-\mu_j<l_j \leqslant l_r<\mu_{r-1}, \tag{4,64}$$

откуда на основании (4, 63) и второго неравенства (4, 8):

$$\sigma_{ij}(x)<\frac{1}{r}+M\varepsilon_j(x) \quad (j=r-1 \text{ или } j=r). \tag{4,65}$$

Предположим теперь, что $j>r$. Принимая во внимание (4, 61) и (4, 57), будем иметь: $x \subset G_j''$, откуда на основании (4, 58), (4, 59) и (4, 50):

$$\sigma_{ij}(x) \leqslant L_j \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} |a_{ik}|. \tag{4,66}$$

Из неравенства (4, 60) получаем:

$$i \leqslant \lambda_j \quad (j>r) \tag{4,67}$$

и, следовательно, на основании (4, 66), (4, 9) и (4, 10):

$$\sigma_{ij}(x) \leqslant L_j\delta_j<\frac{1}{2^j} \quad (j>r). \tag{4,68}$$

Рассмотрим еще случай, когда $j<r-1$. Принимая во внимание (1, 4), (4, 6) и (4, 60), будем иметь:

$$|a_{ik}| \leqslant \gamma_i \leqslant \gamma'_{\lambda_r} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

а в таком случае из неравенства (4, 58) получаем:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}(x) \leqslant \gamma'_{\lambda_r}\Big[\sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_j}|Z_l(x)-\psi(x)|+|Z_{l_j}(x)-\psi(x)|(\mu_{j+1}-\mu_j')\Big] \\ (l=l_{j-1}+k-\mu_j).\end{aligned}\right\} \tag{4,69}$$

На основании (4, 57) из равенства (4, 61) следует, что $x \subset G_r$. Так как все значения l, входящие в правую часть неравенства

(4, 69), удовлетворяют неравенству (4, 59), то, сопоставляя (4, 69) и (4, 50), будем иметь:

$$\sigma_{ij}(x) \leqslant \gamma'_{\lambda_r} L_r (\mu_{j+1} - \mu_j) \quad (j < r - 1). \tag{4, 70}$$

Во всех наших рассуждениях мы предполагаем, что x есть любая точка множества (E, G). Из равенства (4, 54) и неравенства (4, 68) следует, что ряд (4, 53) сходится в рассматриваемой точке x для всех значений i, для которых соответствующее значение r удовлетворяет неравенству (4, 61). Иначе говоря, ряд (4, 53) сходится в рассматриваемой точке x для всех достаточно больших значений i. Обозначая через $T_i(x)$ сумму этого ряда, мы будем иметь:

$$T_i(x) = \sum_{j=1}^{r-2} \sigma_{ij}(x) + \sigma_{i,r-1}(x) + \sigma_{ir}(x) + \sum_{j=r+1}^{\infty} \sigma_{ij}(x). \tag{4, 71}$$

Докажем, что

$$\lim_{i\to\infty} T_i(x) = 0. \tag{4, 72}$$

Принимая во внимание неравенство (4, 70) и равенство $\mu_1 = 0$, будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{r-2} \sigma_{ij}(x) < \gamma'_{\lambda_r} \cdot L_r \sum_{j=1}^{r-2} (\mu_{j+1} - \mu_j) = \gamma'_{\lambda_r} L_r \mu_{r-1}. \tag{4, 73}$$

Из определения числа r следует, что

$$\lim_{i\to\infty} r = \infty, \tag{4, 74}$$

а в таком случае из неравенства $\sigma_{ij}(x) \geqslant 0$ и второго неравенства (4, 8) следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{r-2} \sigma_{ij}(x) = 0. \tag{4, 75}$$

Из неравенства (4, 65) получаем:

$$\sigma_{i,r-1}(x) < \frac{1}{r} + M \cdot \varepsilon_{r-1}(x),$$

$$\sigma_{ir}(x) < \frac{1}{r} + M \cdot \varepsilon_r(x),$$

откуда на основании (4, 56) и (4, 74):

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{i,r-1}(x) = 0, \quad \lim_{i\to\infty} \sigma_{ir}(x) = 0. \tag{4, 76}$$

Кроме того, из неравенства (4, 68) будем иметь:

$$\sum_{=r+1}^{\infty} \sigma_{ij}(x) < \frac{1}{2^r}$$

и, следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=r+1}^{\infty} \sigma_{ij}(x) = 0. \tag{4, 77}$$

Сопоставляя (4, 71), (4, 75), (4, 76) и (4, 77), получаем равенство (4, 72).

Таким образом мы доказали, что в любой точке x, принадлежащей множеству (E, G), ряд (4, 53) сходится для всех достаточно больших значений i и имеет сумму, которая стремится к нулю, когда $i \to \infty$. Как мы уже видели, отсюда следует, что ряд (4, 27) суммируется методом T'_0 в рассматриваемых точках x и имеет сумму, равную $\psi(x)$. Принимая во внимание (4, 51), мы отсюда заключаем, что ряд (4, 27) суммируется данным методом T'_0 почти всюду на интервале (a, b). Мы уже видели, что ряд (4, 28) обладает тем же свойством. Следовательно, на основании (4, 26) ряд (1, 10) суммируется данным методом T'_0 почти всюду на (a, b). Теорема I доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР.

Поступило 20. I. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace mat. fiz., **22,** 113—119, 1911.
[2] Menchoff D., Sur la convergence et la sommation des séries de fonctions orthogonales, Bulletin de la Société Math. de France, **64,** 147, 1936.
[3] Kaczmarz u. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa, 1935.
[4] Egoroff D., Sur les suites des fonctions mesurables, C. R. Acad. Sc., **152,** 244, 1911.
[5] Fischer E., Sur la convergence en moyenne, C. R. Acad. Sc., **144,** 1022—1024, 1148—1150, 1907.
[6] Riesz F., Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, C. R. Acad. Sc. **144,** 615—619, 734—736, 1907.
[7] J. Marcinkiewicz, Sur la convergence des séries orthogonales, Studia Math., **6,** 39, 1936.

D. MENCHOFF. SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DE FONCTIONS ORTHOGONALES PAR DES MÉTHODES LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Le but de cet ouvrage est de démontrer un théorème sur la sommation des séries de fonctions orthogonales par des méthodes linéaires. Rappelons tout d'abord la définition de ces méthodes. Étant données une série infinie quelconque

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

et une matrice infinie

$$\begin{array}{|lllll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1k}, \dots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2k}, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}, & a_{i2}, & a_{i3}, & \dots, & a_{ik}, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{2}$$

considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} s_k \tag{3}$$

où $s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$ .On dit que la série (1) est sommable par la méthode linéaire définie à l'aide de la matrice (2), si la série (3) converge pour toutes les valeurs de i suffisamment grandes et possède une somme qui tend vers une limite finie, bien déterminée lorsque $i \to \infty$. La valeur de cette limite est, par définition, la somme généralisée de la série (1).

On dit qu'une méthode linéaire est régulière, si les éléments de la matrice (2) vérifient les conditions suivantes:

1°. La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ converge absolument pour toutes les valeurs de i et

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1.$$

2°.
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < M$$
où M ne dépend pas de i.

3°.
$$\lim_{i \to \infty} a_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)^*.$$

Soit γ_i le maximum de tous les nombres $|a_{ik}|$ pour une valeur fixe de i,

$$\gamma_i = \max_{1 \leqslant k < +\infty} |a_{ik}|. \tag{4}$$

Nous désignerons par T' toute méthode linéaire pour laquelle les éléments a_{ik} de la matrice (2) vérifient les conditions 1°, 2° et aussi la condition

4°.
$$\lim_{i \to \infty} \gamma_i = 0.$$

Il est clair que toute méthode T' est une méthode régulière, mais la proposition réciproque n'est pas vraie. D'ailleurs il est

* La définition dés méthodes régulières est due à M. Toeplitz ([1]).

facile de voir que les méthodes de Cesàro de tout ordre positif sont des méthodes T' (²).

Soit

$$\{ \varphi_n(x) \} = \{ \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \} \tag{5}$$

un système normé de fonctions orthogonales sur un intervalle (a, b), c'est-à-dire

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Suivant M. M. S. Kaczmarz et H. Steinhaus, nous désignerons un tel système par *ON*. On peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Étant donnés un système ON arbitraire* (5) *et une méthode quelconque T', on peut toujours effectuer dans ce système un changement de l'ordre des fonctions de tel façon que pour le nouveau système $\{ \varphi_{\nu_n}(x) \}$ ainsi obtenu, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

soit sommable par la méthode T' considérée presque partout dans (a,b), où c_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ sont des constantes assujetties à une seule condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty. \tag{6}$$

Dans la démonstration de ce théorème il faut se servir d'un lemme et d'un théorème dont les énoncés sont les suivants.

LEMME *. *Étant donné un système ON arbitraire* (5), *on peut déterminer une suite croissante de nombres entiers et positifs m_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, tels que*

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{m_k} c_n \varphi_n(x)$$

existe et possède une valeur finie presque partout dans (a, b), où c_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des constantes assujetties à une seule condition (6) **.

THÉORÈME II. *Chaque système ON infini contient une partie infinie qui est un système de convergence.*

---

* Pendant que cet ouvrage se trouvait sous presse, j'ai appris que ce lemme avait été déjà démontré par M. Marcinkiewicz (⁷). Le théorème II est une conséquence immédiate de ce lemme.

** Nous dirons qu'un système *ON* quelconque $\{ \psi_n(x) \}$ est un s y s t è m e d e c o n v e r g e n c e, lorsque la condition (6) entraine toujours la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

presque partout dans (a, b).

La définition du système de convergence, ainsi que la démonstration du théorème II se trouvent aussi dans l'ouvrage cité plus haut (²).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

П. С. НОВИКОВ

О ВЗАИМООТНОШЕНИИ ВТОРОГО КЛАССА ПРОЕКТИВНЫХ МНОЖЕСТВ И ПРОЕКЦИЙ УНИФОРМНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ *

Работа посвящена выяснению условий, при которых A_2-множество является A_2'-множеством.

Установлено, что проекция на ось OX всякого CA-множества, не имеющего совершенного ядра ни на одной прямой x=const, есть всегда A_2'-множество. Кроме того, установлено, что всякое A_2-множество есть проекция CA-множества, пересекающегося прямыми x=const по B-множествам.

Установлена связь рассматриваемой проблемы с проблемой мощности CA-множеств, а именно: если существует A_2-множество, не являющееся A_2'-множеством, то всякое несчетное CA-множество имеет совершенное ядро.

Для проблемы мощности CA-множеств получена следующая редукция: Если у всякого несчетного CA-множества всегда существует конституанта, имеющая не менее двух точек, то существует и совершенное ядро.

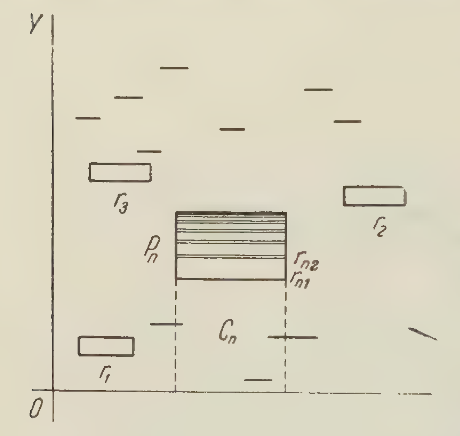
В моей предыдущей работе (1) я рассмотрел класс множеств, являющихся проекциями униформных аналитических дополнений. В частности, мною было установлено, что этот класс совпадает с классом проекций конечноформных аналитических дополнений. После этого естественно возникает вопрос о том, что представляет собою класс проекций счетноформных аналитических дополнений? Методы предыдущей работы не позволяют выяснить, совпадает ли этот класс множеств с классом проекций униформных аналитических дополнений. В настоящей работе я доказываю это, причем применяемый здесь метод дает возможность доказать следующее: проекция на ось OX любого плоского аналитического дополнения, пересекающегося с каждой прямой, параллельной оси OY, по множеству, не содержащему совершенного ядра, является в то же время проекцией однозначного аналитического дополнения.

Далее установлено, что вопрос о соотношении класса проекций униформных аналитических дополнений и второго класса проек-

---

* Доложено на заседании Группы математики Академии Наук СССР 22 декабря 1936 г.

тивных множеств связан с проблемой мощности аналитических дополнений, именно: из гипотезы, что существует проективное множество второго класса, не являющееся проекцией никакого униформного аналитического дополнения, вытекает, что каждое несчетное аналитическое дополнение имеет мощность континуума. Множества, являющиеся проекциями униформных аналитических дополнений, мы будем называть ради краткости A_2'-множествами.



В дальнейшем мы неоднократно будем опираться на следующую лемму:

ЛЕММА I. *Пусть C есть элементарное решето, $\alpha(x)$— индекс* этого решета в точке x. Всегда существует решето $\overline{C}$, индекс которого равен $\omega^{\alpha(x)}$.*

Доказательство. Рассмотрим решето C. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ будут интервалы этого решета. Мы можем предположить, что к каждому из этих интервалов примыкает сверху прямоугольник, не содержащий никаких других интервалов этого решета. Подобное решето мы будем называть изолированным. Прямоугольник, примыкающий к интервалу r_n, обозначим через P_n. Обозначим через C_n часть решета C, находящуюся под интервалом r_n. Проведем внутри каждого прямоугольника P_n счетное число отрезков прямых, параллельных и равных r_n, стремящихся к верхней стороне этого прямоугольника. Пусть это будет последовательность $r_{n1}, r_{n2}, \ldots, r_{nk}, \ldots$ (причем r_{n1} есть r_n).

Совокупность всех интервалов r_{nk} есть изолированное решето; обозначим его C^1.

Обозначим через P_{nk} прямоугольник, примыкающий сверху к интервалу r_{nk} и не содержащий других интервалов решета C^1. Преобразуем часть плоскости, лежащую под элементом r_n, в прямоугольник P_{nk} таким образом, чтобы абсциссы точек при этом не менялись, а ординаты изменились с сохранением взаимного порядка. Обозначим это преобразование** U_{nk}. Совокупность всех образов интервалов r_{ij}, которые получатся от всевозможных преобразований U_{nk}, присоединим к решету C^1; мы получим новое изолированное решето C^2. Применяя описанный процесс к ре-

* Индекс решета в точках A-множества мы считаем равным Ω.
** Преобразование U_{nk} имеет вид: $x_1 = x$, $y_1 = \varphi(y)$.

шету C^2, мы получим решето C^3. Вообще, применяя этот процесс к решету C^n, получим решето C^{n+1}.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{C} = C^1 + C^2 + \ldots + C^n + \ldots$$

Пусть R_a, R_a^j, $\overline{R}_a$ суть части решет C, C^j, $\overline{C}$, расположенные на прямой $x = a$.

Обозначим через S_{ab}, S_{ab}^j, $\overline{S}_{ab}$ части множеств R_a, R_a^j и $\overline{R}_a$, для которых $y < b$.

Мы покажем, что решето $\overline{C}$ удовлетворяет требованию леммы. Итак, нам надо показать, что индекс решета $\overline{C}$ в точке x есть ω^α, если индекс решета C в той же точке есть α. Доказательство будем вести методом трансфинитной индукции.

Рассмотрим точки оси OX, для которых индекс решета C есть 1. Пусть a есть такая точка. Тогда множество R_a^1, очевидно, имеет тип ω. Множества R_a^2, R_a^3, ... будут совпадать с R_a^1, так как под единственной точкой множества R_a никаких прямоугольников P_{nk} нет, и, следовательно, новые интервалы, которые получаются в решетах C^2, C^3, ... только посредством преобразований U_{nk}, не будут пересекать прямую $x = a$.

Итак, для $\alpha = 1$ высказываемое утверждение верно, каково бы ни было изолированное решето C.

Допустим, что α есть любое число первого или второго класса и что для всех меньших чисел и любого решета C высказываемое утверждение верно. Рассмотрим точку a, для которой R_a имеет тип α.

I случай: α есть число второго рода. Тогда R_a не содержит своей верхней грани, но содержит последовательность точек (a, b_1), $(a, b_2), \ldots, (a, b_n), \ldots$, где $b_i < b_{i+1}$, стремящихся к его верхней грани. Пусть $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_i}, \ldots$ — интервалы решета C, проходящие соответственно через точки $(a, b_1), (a, b_2), \ldots, (a, b_i), \ldots$

Рассмотрим решета $C_{n_i}, C_{n_i}^1, \ldots, C_{n_i}^j, \ldots$, и $\overline{C}_{n_i}$, где $\overline{C}_{n_i}$ есть часть решета $\overline{C}$, расположенная под интервалом r_{n_i}, а $C_{n_i}^j$ — часть решета C, расположенная под интервалом r_{n_i}.

Нетрудно видеть, что $\overline{C}_{n_i}$ получается из C_{n_i} точно таким же процессом, как решето $\overline{C}$ из решета C. С другой стороны, множество S_{ab_i} имеет тип β_i, меньший α; тогда, согласно сделанному предположению, $\overline{S}_{ab_i}$ имеет тип ω^{β_i}. Но $\lim \beta_i = \alpha$ и, следовательно, $\lim \omega^{\beta_i} = \omega^\alpha$, т. е. тип $\overline{R}_a$ есть ω^α.

II случай: α есть число первого рода. Тогда R_a имеет самую верхнюю точку, пусть это будет $\varphi(a, b)$. Пусть интервал решета C, проходящий через точку φ, будет r_q. Тогда, как

и в предыдущем случае, тип множества $\bar{S}_{ab}$, согласно предположению, будет равен $\omega^{\alpha-1}$, так как тип S_{ab} есть $\alpha-1$. Рассмотрим прямоугольники $P_{q1}, P_{q2}, \ldots, P_{qi}, \ldots$ Обозначим через p_{qi} интервал, являющийся пересечением прямоугольника P_{qi} и прямой $x=a$. Часть множества $\bar{R}_a$, расположенная в интервале p_{qi}, есть отображение $\bar{S}_{ab}$ посредством преобразования U_{qi}, так как, во-первых, каждая точка множества $\bar{S}_{ab}$ принадлежит некоторому R_a^n и, следовательно, R_a^{n+1} будет содержать ее отображение в p_{qi}; во-вторых, интервал p_{qi} содержит только точки множества $\bar{R}_a$, которые являются отображениями точек $\bar{S}_{ab}$ при преобразовании U_{qi}. Кроме точек, являющихся отображениями точек множества $\bar{S}_{ab}$ на интервалах p_{qi}, нижних концов интервалов p_{qi} и самого множества $\bar{S}_{ab}$, на прямой $x=a$ больше точек решета $\bar{C}$ не имеется, так как v есть самая верхняя точка решета C на этой прямой, и над ней никаких других прямоугольников вида P_{nk}, кроме указанных выше P_{qi}, нет.

Но тогда множество $\bar{R}_a$ состоит из множества $\bar{S}_{ab}$ и из счетного числа ему подобных, расположенных в интервалах p_{qi}, иначе говоря, тип $\bar{R}_a$ есть $\omega^{\alpha-1}\cdot\omega=\omega^{\alpha}$.

Ч. Т. Д.

Для дальнейшего нам необходимо сделать два замечания относительно некоторых свойств трансфинитных чисел и решет.

1. Легко видеть, что трансфинитные числа типа ω^{α} обладают тем свойством, что если

$$\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2,$$

то

$$\beta_1=\beta_2.$$

Нетрудно также видеть, что трансфиниты рассматриваемого вида обладают еще таким свойством: если $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+ +\ldots+\beta_n$ и, кроме того, $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_n$, то $\alpha_1=\beta_1, \alpha_2= =\beta_2, \ldots, \alpha_n=\beta_n$.

Отсюда вытекает, что для любых трансфинитов ω^{α} мы будем иметь: если

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_1=\beta_1\cdot\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_n+ +\beta_1\cdot\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_{n-1}+\ldots+\beta_1,$$

то $\beta_1\cdot\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_i=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_i$ для всякого числа i от 1 до n. Отсюда вытекает, что $\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \ldots, \alpha_n=\beta_n$.

Говоря иначе, выражение

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_1,$$

где все α_n суть числа типа ω^{α}, вполне определяет числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

2. Пусть мы имеем n аналитических дополнений $E_1, E_2, \ldots, E_n$, причем E_i определяется решетом C_i. Индексы этих решет мы будем предполагать в дальнейшем числами вида ω^{α}, что возможно на

основании леммы I. Ясно, что пересечение $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ аналитических дополнений, заданных решетами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, может быть определено решетом, состоящим из суммы решет $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, расположенных одно над другим, и таких, что C_i' подобно C_i. Обозначим эту сумму решет C_n^*. Трансфинитный индекс решета C_n^* в каждой точке аналитического дополнения $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ будет равен сумме индексов решет $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, или, что то же, решет $C_1, C_2, \ldots, C_n$, причем суммирование ведется в том порядке, в каком решета C_k' расположены одно над другим. Покажем теперь, что множество $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ можно определить решетом C_n^{**} таким, что индекс решета C_n^{**}, в каждой точке множества $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$, равен произведению индексов решет $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Рассмотрим счетную совокупность прямоугольников $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ со сторонами, параллельными осям координат, не имеющих попарно общих точек и таких, что верхние стороны этих прямоугольников (так же, как нижние) образуют решето, подобное C_n. Такое множество прямоугольников, очевидно, существует. В каждом из прямоугольников l_i расположим совокупность прямоугольников $l_{i1}, l_{i2}, \ldots, l_{in}, \ldots$, подобную части решета C_{n-1}, расположенной в полосе, ограниченной прямыми, составляющими продолжения сторон прямоугольника l_i, параллельных оси OY. Таким же образом мы определим совокупности прямоугольников

$$\{l_{i_1 i_2 i_3}\}, \ldots, \{l_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}\}.$$

В каждый прямоугольник $l_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ мы впишем решето, подобное части решета C_1, расположенной в полосе, ограниченной продолжениями сторон прямоугольника $l_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, параллельных оси OY. Это решето состоит из счетного числа отрезков, которые мы будем обозначать:

$$g_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} 1},\ g_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} 2}, \ldots, g_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}, \ldots$$

Совокупность отрезков $g_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ образует решето. Очевидно, что, во-первых, это решето определяет $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ и, во-вторых, индекс этого решета в точке x_0 равен произведению индексов решет $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Сопоставляя это с тем, что сказано раньше относительно суммирования решет, мы можем утверждать, что *для решет $C_1, C_2, \ldots, C_n$ существует решето $\overline{C}_n$, определяющее $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ и такое, что индекс решета $\overline{C}_n$ в точке x_0 есть*

$$\alpha_1(x_0) \cdot \alpha_2(x_0) \cdot \ldots \cdot \alpha_n(x_0) + \alpha_1(x_0) \cdot \alpha_2(x_0) \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1}(x_0) + \ldots + \alpha_1(x_0),$$

где $\alpha_i(x_0)$—индекс решета C_i в точке x_0.

Пусть E_1 разбивается при помощи решета C_1 на конституанты $\{E_{1\beta}\}$, E_2—на конституанты $\{E_{2\beta}\}$ и т. д., E_n разбивается решетом C_n на конституанты $\{E_{n\beta}\}$.

Покажем, что *множество* $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ *разбивается решетом* C_n *на конституанты, совокупность которых представляет собою совокупность всех множеств вида*

$$\left\{ E_{1\beta_1} \cdot E_{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n\beta_n} \right\}.$$

Решета $C_1, C_2, \ldots, C_n$ мы можем считать попарно без равных индексов.

Рассмотрим какую-нибудь конституанту множества $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$. Ее индекс есть число вида

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} + \ldots + \beta_1. \qquad (*)$$

Выражение (*) вполне определяет числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Отсюда следует, что каждая точка рассматриваемой конституанты входит в

$$E_{1\beta_1} \cdot E_{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n\beta_n}.$$

Обратное положение очевидно. Итак, каждая конституанта множества $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ есть пересечение конституант множеств E_1, $E_2, \ldots, E_n$.

Рассмотрим теперь любое пересечение конституант

$$E_{1\beta_1} \cdot E_{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n\beta_n}.$$

Каждой точке этого пересечения отвечает индекс решета $\bar{C}_n$:

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} + \ldots + \beta_1.$$

Следовательно, каждая точка множества

$$E_{1\beta_1} \cdot E_{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n\beta_n}$$

принадлежит конституанте множества $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ с индексом

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} + \ldots + \beta_1.$$

Ч. Т. Д.

ЛЕММА II. *Пусть дано некоторое аналитическое дополнение* E, *разбитое на конституанты* E_β, *и некоторое совершенное множество* P, *пересекающееся с каждой конституантой индекса, не превышающего* α, *не более как по счетному множеству и имеющее точки на* E_α. *Тогда существует счетное число аналитических дополнений* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$, *принадлежащих множеству* E, *разбитых определенным образом на конституанты* $\mathcal{E}_{i\beta}$ *и таких, что по крайней мере одна из конституант* $\mathcal{E}_{i\beta}$ *пересекается с* P *по одной и только одной точке, которая в то же время принадлежит* E_α.

Ни множества $\mathcal{E}_i$, *ни их конституанты* $\mathcal{E}_{i\beta}$ *не зависят ни от выбора совершенного множества* P, *ни от числа* α.

Доказательство. Пусть E—некоторое аналитическое дополнение, C—решето, его определяющее, и P—совершенное множество, содержащее точки некоторой конституанты E_α и пересекающееся с множеством $E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha$ не более, как по счетному множеству точек. Мы можем предположить, что индексы решета C имеют вид ω^α. Пусть

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \qquad (1)$$

совокупность интервалов решета C;

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots \qquad (2)$$

совокупность интервалов с рациональными концами, содержащихся в интервалах решета C. Обозначим через C_n часть решета C, расположенную под ρ_n, а через C_n^+ решето, определяющее то же CA-множество, что и C_n, и имеющее в точке x трансфинитный индекс ω^γ, если C_n в этой точке имеет индекс γ.

E_n есть аналитическое дополнение, определяемое решетом C_n на интервале $\Pi_x(\rho_n)$*; $E_{n\gamma}$ и $E_{n\gamma}^+$ суть конституанты E_n, определяемые решетами C_n и C_n^+.

Мы имеем:

$$E_{n\gamma} = E_{n\omega^\gamma}^+.$$

Рассмотрим всевозможные множества вида:

$$P \cdot E_\alpha \text{ и } P \cdot E_\alpha \cdot E_{n_1\beta_1} \cdot E_{n_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n_k\beta_k},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$—произвольные целые числа, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$—числа первого и второго классов. Покажем, что по крайней мере одно из этих множеств clairsemé. Предположим противное. Тогда $P \cdot E_\alpha$ не есть clairsemé, и мы можем найти два интервала l_1 и l_2 без общих точек, содержащих точки $P \cdot E_\alpha$. Пусть r_{n_1} и r_{n_2}—интервалы последовательности (1) с наименьшими индексами, проекции которых на ось OX содержат соответственно точки множеств $l_1 \cdot P \cdot E_\alpha$ и $l_2 \cdot P \cdot E_\alpha$. Тогда мы можем найти два интервала ρ_{m_1} и ρ_{m_2}, содержащиеся соответственно в r_{n_1} и r_{n_2} и такие, что $\Pi_x(\rho_{m_1}) \subset l_1$, $\Pi_x(\rho_{m_2}) \subset l_2$, $\Pi_x(\rho_{m_1})$ содержит точки множества $l_1 \cdot P \cdot E_\alpha$, а $\Pi_x(\rho_{m_2})$ содержит точки множества $l_2 \cdot P \cdot E_\alpha$ и $\Pi_x(\rho_{m_1}) \cdot \Pi_x(\rho_{m_2}) = 0$.

Среди множеств $l_1 \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}$ и $l_2 \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2}$ найдутся, очевидно, не пустые. Пусть $l_1 \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}$ не пустое множество с наименьшим индексом β_1 и $l_2 \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2}$ не пустое множество с наименьшим индексом β_2. Оба эти множества будут в силу гипотезы не clairsemé. Тогда мы можем выбрать четыре интервала попарно без общих точек:

$$l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}$$

XO* $\Pi_x(A)$ есть проекция A на ось OX.

так, что

$$l_{11} \text{ и } l_{12} \subset \Pi_x(\rho_{m_1}), \text{ а } l_{21} \text{ и } l_{22} \subset \Pi_x(\rho_{m_2})$$

и, кроме того, l_{11} и l_{12} содержат точки множества $P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}$, а l_{21} и l_{22} содержат точки множества $P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2}$.

Далее мы возьмем четыре интервала $r_{n_3}, r_{n_4}, r_{n_5}, r_{n_6}$ последовательности (1), отличные от r_{n_1} и r_{n_2}, с наименьшими индексами, из тех, проекции которых содержат соответственно точки множеств:

$$l_{11} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}, \ldots, l_{22} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2}.$$

Из этих интервалов выделим интервалы $\rho_{m_3}, \rho_{m_4}, \rho_{m_5}, \rho_{m_6}$ такие, что

$$l_{11} \supset \Pi_x(\rho_{m_3}), \; l_{12} \supset \Pi_x(\rho_{m_4}), \; l_{21} \supset \Pi_x(\rho_{m_5}), \; l_{22} \supset \Pi_x(\rho_{m_6})$$

и, кроме того, $\Pi_x(\rho_{m_3})$ содержит точки множества $l_{11} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1}$ и т. д.

Далее очевидно, что среди множеств

$$l_{11} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1} \cdot E_{m_3\beta_3}$$

найдутся не пустые. Возьмем из них то, у которого индекс β_3 наименьший. Таким же образом определяем множества:

$$l_{12} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1} \cdot E_{m_4\beta_4}, \ldots, l_{22} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1} \cdot E_{m_6\beta_6}.$$

Подобным же образом мы можем определить интервалы

$$l_{111}, l_{112}, \ldots, l_{222}$$

и соответствующие множества:

$$l_{111} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\beta_1} \cdot E_{m_3\beta_3} \cdot E_{m_7\beta_7}, \ldots, l_{222} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_2\beta_2} \cdot E_{m_6\beta_6} \cdot E_{m_{15}\beta_{15}}.$$

Рассмотрим множество

$$H = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} l_{i_1} \cdot l_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot l_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot \ldots$$

Ясно по построению, что H содержится в P, кроме того, H есть совершенное множество. Покажем*, что H содержится в

$$E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha.$$

Рассмотрим любую точку множества H, например

$$h = l_{j_1} \cdot l_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot l_{j_1 j_2 \ldots j_k} \cdot \ldots$$

Пусть R^h есть прямая, перпендикулярная оси OX и проходящая через точку h; интервалам $l_{j_1}, l_{j_1 j_2}, \ldots$ согласно построению

* См. лит. ([2]).

соответствуют интервалы решета $r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_k}, \ldots$, причем $p_1 < < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$

Покажем, что прямая R^h пересекает решето C только по этим интервалам.

В самом деле, пусть R^h пересекается еще с некоторым интервалом r_q, не принадлежащим системе интервалов r_{p_k}; тогда существует такое целое число t, что $p_t < q < p_{t+1}$. Но $r_{p_{t+1}}$ есть интервал с наименьшим индексом, отличный от интервалов $r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_t}$ и такой, что его проекция покрывает точки множества

$$l_{j_1 j_2 \ldots j_k} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{g_1\gamma_1} \cdot E_{g_2\gamma_2} \cdot \ldots \cdot E_{g_k\gamma_k}.$$

Точка h является, очевидно, предельной к этому множеству, так как оно имеет точки во всех последующих интервалах $l_{j_1 j_2 \ldots j_{k+1}}, \ldots$ Следовательно, проекция интервала p_q тоже покрывает точки данного множества. Отсюда $q = p_{t+1}$.

Покажем теперь, что $R^h \cdot C$ есть множество вполне упорядоченное, имеющее тип, не превышающий α. Пусть $a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_k}, \ldots$ ординаты точек $R^h \cdot C$, причем a_{p_k} есть ордината точки $R^h \cdot r_{p_k}$. Точке a_{p_k} поставим в соответствие порядковый тип γ_k. Пусть $a_{p_{k_1}} > a_{p_{k_2}}$. Возьмем некоторую точку с ординатой a_{p_d} так, что $p_d > p_{k_1}, p_{k_2}$. Тогда, если точка x_0 принадлежит множеству

$$l_{j_1 j_2 \ldots j_d} \cdot P \cdot E_\alpha \cdot E_{g_1\gamma_1} \cdot E_{g_2\gamma_2} \cdot \ldots \cdot E_{g_d\gamma_d},$$

то прямая $x = x_0$ пересекает решета $C_{g_{k_1}}$ и $C_{g_{k_2}}$ по вполне упорядоченным множествам типа γ_{k_1} и γ_{k_2}. Но так как $R^{x_0} \cdot C_{g_{k_2}} \supset \supset R^{x_0} C_{g_{k_1}}$, то $\gamma_{k_1} > \gamma_{k_2}$. Это значит, что последовательность ординат a_{p_k} отражается подобно на совокупность порядковых чисел. Следовательно, $R^h \cdot C$ есть множество вполне упорядоченное; кроме того, все числа γ_k не превышают α и поэтому тип $R^h \cdot C$ тоже не может превышать α. Таким образом, точка h принадлежит одному из множеств $E_0, E_1, \ldots, E_\alpha$ и, следовательно,

$$H \subset E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha.$$

Но это есть противоречие, так как

$$(E_0 + E_1 + \ldots + E_\alpha) \cdot P$$

по предположению—множество счетное.

Итак, мы доказали, что по крайней мере одно из множеств

$$P \cdot E_\alpha, P \cdot E_\alpha \cdot E_{n_1\beta_1} \cdot E_{n_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E_{n_k\beta_k}$$

есть множество clairsemé. Пусть это будет множество

$$P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot E_{m_k\alpha_k}.$$

Очевидно, мы можем из каждого интервала ρ_{m_i} выбрать интервал ρ_{s_i} так, что проекция его содержит одну и только одну точку x_0 множества

$$P \cdot E_\alpha \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot E_{m_k\alpha_k}$$

и притом одну и ту же для всякого $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Но тогда

$$P \cdot E_\alpha \cdot E_{s_1\alpha_1} \cdot E_{s_2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot E_{s_k\alpha_k}$$

будет состоять только из одной точки x_0.

Рассмотрим теперь всевозможные множества вида:

$$E \text{ и } E \cdot E_{g_1} \cdot E_{g_2} \cdot \ldots \cdot E_{g_i},$$

где i—любое целое число.

Множества этого типа мы можем представить следующим образом:

$$(E_0 + E_1 + \ldots + E_\beta + \ldots\ldots) \cdot (E^+_{g_10} + E^+_{g_11} + \ldots + E^+_{g_1\beta} + \ldots\ldots) \cdot$$
$$\cdot (E^+_{g_20} + E^+_{g_21} + \ldots + E^+_{g_2\beta} + \ldots\ldots) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot (E^+_{g_i0} + E^+_{g_i1} + \ldots + E^+_{g_i\beta} + \ldots\ldots) \cdot \ldots$$

или

$$\sum_{\beta_0\beta_1\beta_2\ldots\beta_i\ldots} E_{\beta_0} \cdot E^+_{g_1\beta_1} \cdot E^+_{g_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E^+_{g_i\beta_i} \cdot \ldots$$

Но числа β_i, для которых множества $E^+_{g_j\beta_j}$ не пусты, суть числа вида ω^α. Поэтому существует такое разложение множества $E \cdot E_{g_1} \cdot E_{g_2} \cdot \ldots \cdot E_{g_i}$, в котором конституантами являются сами множества

$$E_{\beta_0} \cdot E^+_{g_1\beta_1} \cdot E^+_{g_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot E^+_{g_i\beta_i}.$$

Но множества

$$E_\alpha \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot \ldots \cdot E_{m_k\alpha_k} = E^+_{\omega^\alpha} \cdot E^+_{m_1\omega^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot E^+_{m_k\omega^{\alpha_k}}$$

и, следовательно, представляют собой конституанты аналитического дополнения

$$E \cdot E_{m_1} \cdot \ldots \cdot E_{m_k}.$$

Итак, одна из конституант этого множества имеет на P одну и только одну точку и эта точка входит в E_α. Обозначим множества

$$E \cdot E_{m_1} \cdot \ldots \cdot E_{m_k}$$

через $\mathcal{E}_j$, так что последовательность

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_j, \ldots$$

содержит все такие множества. Обозначим множества

$$E^+_{\omega^\beta} \cdot E^+_{m_1\omega^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot E_{m_k\omega^{\beta_k}}$$

через $\mathcal{E}_{j\gamma}$, так что совокупность множеств $\{\mathcal{E}_{j\beta}\}$ состоит из всех конституант множеств $\{\mathcal{E}_j\}$. Эти обозначения совпадают с теми, которые приведены в формулировке леммы.

Ч. Т. Д.

Сделаем одно замечание по поводу проблемы мощности аналитических дополнений. Допустим, что существует некоторое аналитическое дополнение, лишенное совершенного ядра. Пусть E будет подобное линейное аналитическое дополнение, оно разбивается при помощи некоторого решета C на конституанты $E = E_0 + E_1 + + \ldots + E_\beta + \ldots \ldots$, где все множества E_β не более как счетные.

Пусть α — номер любой не пустой конституанты; тогда для этого числа α мы можем применить доказанную нами лемму, причем в качестве совершенного множества P возьмем ось OX, где расположено E.

Итак, существует счетное число аналитических дополнений $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$, заданных решетами $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ так, что по крайней мере одно, например $\mathcal{E}_q$, имеет некоторую конституанту $\mathcal{E}_{q\alpha_1}$, состоящую из одной и только одной точки множества E_α. Но тогда найдется такое множество $\mathcal{E}_p$, которое будет иметь $\aleph_1$ различных конституант, каждая из которых состоит из одной и только одной точки.

Рассмотрим пространство $OXYZ$. Пусть на оси OX расположено множество $\mathcal{E}_p$ и в плоскости OXZ — решето C_p, его определяющее; проведем через каждую точку решета C_p прямую под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси OX. Совокупность этих прямых образует некоторое пространственное решето C_p^*. Проведем также через каждую точку решета C_p прямую, параллельную оси OY. Получим некоторое пространственное решето $\overline{C}_p$. Пусть M множество тех точек плоскости OXY с ординатой, не равной нулю, в которых индекс решета $\overline{C}_p$ равен индексу решета C_p^*. M есть аналитическое множество. Обозначим через $\Pi_x(M)$ его проекцию на ось OX. Рассмотрим множество

$$H = C\Pi_x(M) \cdot \mathcal{E}_p.$$

Пусть a есть точка $\mathcal{E}_p$, принадлежащая некоторой конституанте E_β, причем эта конституанта содержит еще другие точки. В таком случае прямая, проходящая через точку a и параллельная оси OY, будет содержать по крайней мере одну точку b, в которой индекс решета C_p^* тот же самый, что и в точке a, т. е. β. Но так как индекс решета $\overline{C}_p$ в точке b тот же, что и в точке a, то b принадлежит множеству M и a принадлежит $\Pi_x(M)$ и не принадлежит H. Наоборот, если конституанта, со-

держащая a, других точек не содержит, то на прямой, параллельной оси OY и проходящей через точку a, кроме ее самой, нет точек, в которых C_p^* имеет тот же индекс, что и в точке a. Но тогда $\Pi_x(M)$ на данной прямой не имеет точек с ординатой, отличной от нуля, и, следовательно, a входит в $C\Pi_x(M)$ и в H.

Итак, множество H представляет собою совокупность всех тех точек, каждая из которых находится в соответствующей конституанте множества $\mathcal{E}_p$ в единственном числе. Мы можем представить множество H следующим образом:

$$H = \mathcal{E}_p \cdot \{ C\Pi_x (M) \cdot \mathcal{E}_p \} = (\mathcal{E}_{p0} + \mathcal{E}_{p1} + \dots + \mathcal{E}_{p\beta} + \dots) \cdot \\ \cdot (H_0 + H_1 + \dots + H_\beta + \dots),$$

где $\mathcal{E}_{p\beta}$ — конституанта $\mathcal{E}_p$, определяемая решетом C_p, а H_α — конституанта H, определяемая каким угодно решетом. Мы знаем, что тогда множество H можно разложить следующим образом на конституанты:

$$H = \sum_{\gamma, \beta = 0}^{\Omega} \mathcal{E}_{p\beta} \cdot H_\gamma,$$

причем конституантами этого разложения будут не пустые множества $\mathcal{E}_{p\beta} \cdot H_\gamma$ и только эти множества. Однако всякое не пустое множество $E_{p\beta} \cdot H_\gamma$ состоит из одной и только одной точки.

Итак, множество H несчетно, лишено совершенного ядра и разбивается на конституанты, состоящие из одной точки каждая.

После этого мы можем сформулировать следующую редукцию: *если для любого несчетного аналитического дополнения и для любого решета, его определяющего, найдется конституанта, содержащая более одной точки, то тогда каждое несчетное аналитическое дополнение содержит совершенное ядро.*

Введем следующее понятие. Пусть C есть пространственное решето, определяющее на плоскости OXY аналитическое дополнение E.

Мы будем называть точку P плоскости OXY точкой единственного индекса решета C, если P принадлежит E и является единственной точкой пересечения прямой, параллельной OY, и некоторой конституанты множества E.

ЛЕММА III. *Множество точек единственного индекса есть аналитическое дополнение и может быть униформизировано аналитическим дополнением.*

Доказательство. Обозначим множество точек единственного индекса решета C через U. Доказательство того, что U есть аналитическое дополнение, может быть сделано аналогично тому,

которое я привел для леммы о точках трансфинитной единственности в моей работе (¹) *.

Пусть G есть пространственное решето, определяющее множество U.

На основании предыдущего мы можем определить множество U таким решетом K, конституанты которого состоят из всевозможных не пустых пересечений конституант U и E. Но на каждой прямой, параллельной оси OY, каждая конституанта множества E содержит не более одной точки множества U, следовательно, каждая конституанта, определенная решетом K, на каждой прямой, параллельной оси OY, будет состоять из одной точки. Отсюда вытекает, что на каждой прямой, параллельной оси OY и содержащей точки множества U, найдется одна единственная точка с минимальным индексом. На основании леммы I предыдущей работы (¹) совокупность этих точек с минимальным индексом—точек трансфинитной единственности—есть аналитическое дополнение, которое в данном случае униформизирует множество U. Это последнее множество мы будем называть **множеством точек относительной трансфинитной единственности множества E.**

ТЕОРЕМА I. *Всякое плоское CA-множество, для которого на каждой прямой, параллельной оси OY и пересекающей данное множество, конституанта наименьшего индекса не более как счетна,— проектируется на ось OX в множество A_2'.*

Доказательство. Пусть G есть плоское аналитическое дополнение, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть C есть пространственное решето, его определяющее, и пусть G_0, G_1, … … , G_α, … … конституанты множества G. Применим нашу лемму к любому не пустому множеству $P^{x_0}G_\beta$, где P^{x_0} есть прямая, $x=x_0$, а x_0 принадлежит проекции G. Здесь условия леммы выполнены, так как P^{x_0}, играющее роль совершенного множества P в лемме, пересекается с G и, следовательно, по крайней мере одна из конституант G_β имеет на P^{x_0} конечное или счетное множество точек, и все конституанты G_α, если $\alpha<\beta$, имеют на P^{x_0} не более счетного числа точек.

Итак, существует счетное число плоских аналитических дополнений $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, … , $\mathscr{E}_n$, … таких, что для каждого $P^{x_0}\cdot G_\beta$ найдется по крайней мере одно множество $\mathscr{E}_{n_1}$, которое имеет некоторую конституанту $\mathscr{E}_{n_1\alpha_1}$, состоящую из одной точки множества $P^{x_0}\cdot G_\beta$. Рассмотрим множество L_{n_1} точек относительной трансфинитной единственности для $\mathscr{E}_{n_1}$. Очевидно, это множе-

* Вся разница состоит в том, что вместо множества R в предыдущей работе надо рассмотреть другое множество, где трансфинитные индексы α и α' равны между собой. См. (¹), лемма I.

ство будет не пусто, так как на прямой P^{x_0} оно имеет точку. Проекция L_{n_1} на ось OX содержит точку x_0.

Подобное рассуждение мы можем провести для каждой точки оси OX, принадлежащей проекции G. Мы получим счетное число униформных CA-кривых $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}, \ldots$, сумма проекций которых есть проекция множества G. Но множество

$$L_{n_1} + L_{n_2} + \ldots + L_{n_k} + \ldots,$$

как известно, на основании доказанной нами ранее теоремы может быть униформизировано при помощи CA-кривой. Пусть это будет L. Очевидно, кривая L униформизирует множество G. Отсюда непосредственно следует, что проекция множества G входит в класс A_2'.

Ч. Т. Д.

Следствие. *Каждое плоское CA-множество, пересекающееся прямыми, параллельными оси OY, не более как по счетному множеству точек, проектируется на ось OX в A_2'-множество.*

Каждое A_2'-множество разбивается на $\aleph_1$ B-множеств. Естественно назвать конституантой номера α A_2'-множества проекцию конституанты номера α того униформного CA-множества, которое проектируется в данное A_2'-множество. Относительно плоских A_2'-множеств мы докажем теорему, являющуюся аналогом теоремы I.

ТЕОРЕМА II. *Плоское A_2'-множество проектируется на ось OX в A_2'-множество, если на каждой прямой, параллельной оси OY и пересекающей данное множество, конституанта наименьшего индекса конечна или счетна.*

Доказательство. Пусть H есть плоское A_2'-множество, расположенное в плоскости OXY и удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть G — поверхность в пространстве $OXYZ$, являющаяся CA-множеством, униформная относительно параллелей к оси OZ и проектирующаяся в H.

Пусть C четырехмерное решето, расположенное в пространстве $OXYZT$, определяющее G и разбивающее его на конституанты G_α. Согласно предположению, в каждой плоскости, параллельной плоскости OYZ и содержащей точки множества G, найдется не пустая конституанта номера β, имеющая в данной плоскости не более, чем счетное число точек, так же, как и всякая конституанта G_α, где $\alpha < \beta$.

Мы можем преобразовать посредством B-преобразования пространство $OXYZT$ в пространстве OXY_1Z_1 так, что плоскости, параллельные OYZ, перейдут в прямые, параллельные оси OY_1; прямые, параллельные оси OT, перейдут в прямые, параллельные оси OZ_1, и ось OX перейдет сама в себя тождественно. Тогда

множество H перейдет само в себя, множество G перейдет в плоское CA-множество G_1, проектирующееся в H. Решето C перейдет в пространственное решето C_1, определяющее на плоскости OY_1Z_1 аналитическое дополнение G_1. Конституанта G_α перейдет в конституанту $G_{1\alpha}$, причем, если G_α не более, как счетно, на некоторой плоскости, параллельной плоскости OYZ, то $G_{1\alpha}$ не более, как счетно, на соответствующей прямой, параллельной оси OY_1.

Итак, мы видим, что множество G_1 удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, следовательно, его проекция, т. е. H, есть A_2'-множество.

Ч. Т. Д.

Следствие. *Каждое плоское A_2'-множество, пересекающееся с прямыми, параллельными оси OY, не более как по счетному множеству точек, проектируется на ось OX в A_2'-множество.*

К этому мы присоединим еще одно замечание, которое нам понадобится дальше.

Пусть мы имеем плоское A_2'-множество, которое на каждой прямой, параллельной оси OY, не имеет совершенного ядра. Тогда вопрос о том, будет ли данное A_2'-множество на этих прямых счетно или несчетно, в настоящее время открыт. Но независимо от этого подобное плоское множество удовлетворяет условиям теоремы II.

Каждое плоское A_2'-множество, не имеющее на прямых, параллельных оси OY, совершенного ядра, проектируется на ось OX в A_2'-множество.

ЛЕММА IV. *Пусть E_1 и E_2 плоские аналитические дополнения, а C_1 и C_2 определяющие их решета. Множество V всех тех точек $(x_0 y_0)$ плоскости, для каждой из которых всюду на прямой $x = x_0$ индекс решета C_2 превосходит индекс решета C_1 в точке $(x_0 y_0)$, есть аналитическое дополнение.*

Доказательство этой леммы содержится в моей статье ([3]).

ТЕОРЕМА III. *Всякое A_2-множество, расположенное на оси OX, может быть получено как проекция плоского аналитического дополнения, пересекающегося с каждой прямой, параллельной оси OY, по B-множеству.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ есть линейное A_2-множество, расположенное на оси OX, а E аналитическое дополнение, расположенное в плоскости OXY и проектирующееся в $\mathcal{E}$. Пусть C пространственное решето, определяющее E. Мы можем предположить, что решето C расположено под некоторой плоскостью P, параллельной плоскости OXY; присоединим плоскость P к решету C, получим новое решето C', которое определяет то же аналитическое дополнение E, но в каждой точке $(x_0 y_0)$ множества E индекс решета C' на 1 больше индекса решета C.

Применим теперь предшествующую лемму следующим образом. За множества E_1 и E_2 леммы примем одно и то же множество E, за решета C_1 и C_2 примем соответственно решета C и C'.

Очевидно, на каждой прямой $x=x_0$ множество V леммы IV состоит из точек конституанты наименьшего индекса множества E, и поэтому пересечение множества V и этой прямой есть B-множество.

С другой стороны, на каждой прямой $x=x_0$, содержащей точки множества E, по крайней мере одна из конституант не пуста. Отсюда следует, что проекция V есть множество E.

Ч. Т. Д.

ТЕОРЕМА IV. *Всякое A_2-множество, содержащееся в некотором A_2'-множестве и обладающее тем свойством, что минимальный индекс в каждой точке данного A_2-множества не превышает индекса в той же точке указанного A_2'-множества, есть тоже A_2'-множество.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ и E множества соответственно типа A_2 и A_2', удовлетворяющие условиям теоремы. Пусть G аналитическое дополнение, проектирующееся в $\mathcal{E}$, а H униформное аналитическое дополнение, проектирующееся в E. Мы можем предположить, что $\mathcal{E}$ и E расположены на оси OX, H расположено в полосе $0<y<1$, а G в полосе $1<y<2$; присоединим еще одно множество G_1, расположенное в полосе $2<y<3$ и полученное смещением вдоль оси OY множества G.

Далее, мы можем предположить, что решета C_1, C_2, C_3, определяющие соответственно H, G и G_1, находятся в пространственных полосах $0<y<1$, $1<y<2$, $2<y<3$, причем решето C_3, определяющее G_1, получено смещением вдоль оси OY решета C_2, определяющего G. Тогда все три решета C_1, C_2 и C_3 могут быть объединены в одно решето C, определяющее аналитическое дополнение

$$H+G+G_1=Q.$$

Отберем на каждой прямой, параллельной оси OY, точки трансфинитной единственности множества Q. Полученное множество обозначим через U. Множество U есть аналитическое дополнение; оно целиком содержится в множестве H. Но точно так же точки множества H такие, что прямая, параллельная оси OY, через них проходящая, содержит и точки множества G, не принадлежат множеству U. Отсюда следует, что U содержится в H и проектируется в $E-\mathcal{E}$. Тогда множество $H-U$ будет проектироваться в множество $\mathcal{E}$. Но множество $H-U$ есть разность двух аналитических дополнений, и поэтому входит

в класс A'_2-множеств. Следовательно, множество $\mathcal{E}$ есть A'_2-множество.

Ч. Т. Д.

Относительно класса A'_2-множеств остается открытым весьма существенный вопрос о взаимоотношении этого класса с классом A_2-множеств. Естественно было бы думать, что класс A_2 много шире класса A'_2, но пока из приведенных теорем мы видим, что все известные свойства A'_2-множеств оказываются в точности такими же, как и A_2-множеств, так что возникает предположение о том, что эти классы совпадают.

В заключение мы покажем, что проблема о взаимоотношении классов A_2- и A'_2-множеств связана с проблемой мощности аналитических дополнений, именно:

Из гипотезы, что класс A_2-множеств шире класса A'_2- множеств, вытекает, что каждое несчетное CA-множество содержит совершенное ядро.

Обратной редукции не получено, но во всяком случае отсюда вытекает, что построить пример A_2-множества, не являющегося A'_2-множеством, не менее «трудно», чем доказать, что мощность всякого несчетного CA-множества есть континуум.

Итак покажем, что из гипотезы, что классы A'_2- и A_2-множеств не совпадают, следует, что каждое несчетное аналитическое дополнение содержит совершенное ядро.

Предположим, что существует некоторое несчетное CA-множество E, не содержащее совершенного ядра. Пусть C есть решето, его определяющее. Возьмем любое множество $\mathcal{E}$ класса A_2. Предположим, что множества E и $\mathcal{E}$ расположены сооответственно на осях OY и OX. Пусть G есть аналитическое дополнение, расположенное в плоскости OXY и проектирующееся в множество $\mathcal{E}$, C'—пространственное решето, его определяющее.

Через каждую точку множества E проведем прямую, параллельную оси OX. Полученное плоское аналитическое дополнение обозначим E^*. Через каждую точку решета C также проведем прямые, параллельные оси OX. Полученное пространственное решето обозначим C^*. Очевидно, что решето C^* определяет множество E^*. Рассмотрим в плоскости OXY множество V, состоящее из всех точек плоскости, для которых индекс решета C^* меньше минимального индекса решета C' на прямой, параллельной оси OY, проходящей через эту точку. На основании леммы IV множество V есть аналитическое дополнение. Оно содержится в множестве E. На прямых, параллельных оси OY и не пересекающих множества $\mathcal{E}$, множество V совпадает с множеством E^*.

Составим разность $E^* - V$; очевидно, она имеет ту же проекцию на ось OX, что и множество G. Кроме того, на каждой прямой, параллельной оси OY, она не содержит совершенного ядра. Очевидно, это есть A_2'-множество. Следовательно, на основании теоремы II проекция его на ось OX есть тоже A_2'-множество. Итак, множество $\mathcal{E}$ есть A_2'-множество.

Математич. институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Novikoff P., Sur les projections des complémentaires analytiques uniformes, Мат. сб. т. 2 (44), № 1, 1937.
[2] Novikoff P. et Lusin N., Choix effectif d'un point etc., Fund. Math. XXV, 1935.
[3] Novikoff P., Sur les separabilités des ensembles projectifs de deuxième classe, Fund. Math. XXV, 1935.

P. NOVIKOFF. SUR QUELQUES RELATIONS ENTRE LES FAMILLES DES ENSEMBLES PROJECTIFS DE CLASSE 2 ET DES PROJECTIONS DES COMPLÉMENTAIRES ANALYTIQUES UNIFORMES

RÉSUMÉ

Le but du présent article est la considération de la famille des ensembles qu'on obtient comme projections des complémentaires analytiques uniformes (nous les avons nommé «ensembles A_2'»).

Le problème de savoir si cette famille coïncide avec celle des ensembles projectifs de deuxième classe (ensembles A_2) reste à resoudre. J'ai demontré dans un travail récent que l'on obtient toujours un ensemble A_2' en prenant la projection d'un complémentaire analytique qui possède au plus un nombre fini de points sur chaque parallèle à l'axe OY. Or, la méthode que j'ai suivi ne permet pas d'étendre ce théorème au cas où le complémentaire analytique considéré possède au plus une infinité dénombrable de points sur chaque parallèle à l'axe OY. Dans le présent article je donne une nouvelle méthode qui permet d'obtenir cette extension; d'ailleurs la même méthode nous donne un lien entre le problème sur le rapport des familles A_2 et A_2' et celui de la puissance des complémentaires analytiques non dénombrables.

Pour démontrer les théorèmes en question nous avons besoin du lemme suivant:

LEMME 1. *Étant donné un crible C définissant un complémentaire analytique E, il existe toujours une suite de cribles $C_1, C_2, \dots \dots C_n, \dots$ définissant des complémentaires analytiques contenus dans E et jouissant de la propriété suivante: quel que soit l'ensemble parfait P, dont l'intersection avec la somme de toutes les constituantes du crible C d'indices $\leqslant \beta$ est un ensemble fini ou dénombrable et qui possède des points dans E_β,—l'un au moins des cribles C_n pos-*

sède une constituante dont l'intersection avec la partie commune de P et de la constituante E_β du crible C est formée d'un seul point.

Voici l'idée de la démonstration de ce lemme: soient

$$E_0, \ E_1, \dots \dots, \ E_\alpha, \dots \dots$$

les constituantes du complémentaire analytique E défini par le crible C. Soient $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ les intervalles formant le crible C et $\rho_1, \rho_2', \dots, \rho_n, \dots$ les intervalles à extrémités rationnelles contenus dans les intervalles r_n. Soit C_m la partie du crible située au dessous de ρ_m et E_m le complémentaire analytique défini par le crible C_m sur la projection de l'intervalle ρ_m. Soit

$$E_m = E_{m0} + E_{m1} + \dots + E_{m\alpha} + \dots \dots$$

la décomposition de E_m en constituantes $E_{m\alpha}$. Considérons tous les ensembles de la forme

$$P \cdot E_\beta \text{ et } P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \dots E_{m_k\alpha_k}$$

les $m_1', m_2, \dots, m_k$ étant des entiers quelconques et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ des nombres quelconques de la 1-re ou 2-de classe. Nous démontrons d'abord que l'un au moin de ces ensembles est formé d'un seul point. Alors le lemme peut être démontré aisément.

En effet, supposons le contraire. Alors chacun des ensembles considérés est privé de points isolés, puisque si l'un d'eux, soi

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \dots E_{m_k\alpha_k}$$

possède un point isolé, on peut trouver des intervalles ρ_{n_1}, $\rho_{n_2}, \dots, \rho_{n_k}$ respectivement contenus dans les intervalles $\rho_{m_1}, \rho_{m_2}, \dots, \rho_{m_k}$ et tels que les projections des ρ_{n_i} ne contiennent que le point isolé de l'ensemble

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{n_1\alpha_1} \cdot \dots \cdot E_{n_k\alpha_k}.$$

Dans ce cas l'ensemble

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{n_1\alpha_1} \cdot \dots \cdot E_{n_k\alpha_k}$$

est formé de ce point seulement. En poursuivant la démonstration nous construisons un ensemble parfait contenu dans

$$P(E_0 + E_1 + \dots + E_\beta)$$

ce qui conduit à une contradiction. La construction de cet ensemble parfait s'obtient de la manière suivante:

On trouve dans la suite $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ l'intervalle r_{n_1} d'indice minimum tel que sa projection contient des points de l'ensemble $P \cdot E_\beta$; dans ce cas nous pouvons choisir deux intervalles ρ_{m_1} et ρ_{m_2} contenus dans r_{n_1}, sans point commun, et tels que leurs projections contiennent une infinité de points de $P \cdot E_\beta$. Il est alors évident que les complémentaires analytiques E_{m_1} et E_{m_2} possèdent des points de $P \cdot E_\beta$.

Soient

$$E_{m_1\alpha_1} \text{ et } E_{m_2\alpha_2}$$

les constituantes de E_{m_1} et E_{m_2} d'indices minima α_1 et α_2 pour lesquelles

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \text{ et } P \cdot E_\beta \cdot E_{m_2\alpha_2}$$

ne sont pas vides. Mais les ensembles

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \text{ et } P \cdot E_\beta \cdot E_{m_2\alpha_2}$$

sont encore privés de points isolés. Nous prenons alors deux intervalles d'indices minima r_{n_2} et r_{n_3} tels que la projection de r_{n_2} contient des points de $P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1}$ et la projection de r_{n_3} contient des points de $P \cdot E_\beta \cdot E_{m_2\alpha_2}$. Nous choisissons ensuite 4 intervalles ρ_{m_3}, ρ_{m_4}, ρ_{m_5}, ρ_{m_6} dont les projections sont deux à deux sans points communs, ρ_{m_3} et ρ_{m_4} étant contenus dans r_{n_2} et les deux autres dans r_{n_3}; les projections de ρ_{m_3} et ρ_{m_4} contiennent des points de $P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1}$ et les projections de ρ_{m_5} et ρ_{m_6} des points de $P \cdot E_\beta \cdot E_{m_2\alpha_2}$. Ce procédé peut être poursuivi d'une manière analogue et l'on obtient les systèmes d'intervalles tels que chaque système suivant est contenu dans le précédent. La partie commune de tous ces systèmes est un certain ensemble parfait H; on démontre qu'il est contenu dans

$$P \cdot (E_0 + E_1 + \dots + E_\beta).$$

La manière de construire cet ensemble H et cette démonstration sont tout à fait analogues à celles que j'ai donné dans mon article «Choix effectif etc.» en montrant comment on trouve effectivement un point dans un complémentaire analytique.

Nous nous appuyons ensuite sur le lemme suivant démontré également dans cet article: la partie commune d'un nombre fini de complémentaires analytiques $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \dots, \mathscr{E}_n$ peut être définie au moyen d'un crible C ayant la propriété suivante: chaque constituante de l'ensemble $\mathscr{E}_1 \cdot \mathscr{E}_2 \cdot \dots \cdot \mathscr{E}_n$ est la partie commune d'un système de constituantes $\mathscr{E}_{1\beta_1}, \cdot \mathscr{E}_{2\beta_2}, \dots, \mathscr{E}_{n\beta_n}$ et vice versa. Construisons donc pour chaque ensemble

$$E \cdot E_{m_1} \cdot E_{m_2} \dots E_{m_k}$$

un crible $C_{m_1 m_2 \dots m_k}$ vérifiant les conditions du lemme que nous venons d'énoncer. Nous avons démontré qu'un certain ensemble

$$P \cdot E_\beta \cdot E_{m_1\alpha_1} \cdot E_{m_2\alpha_2} \cdot \dots \cdot E_{m_k\alpha_k}$$

est formé d'un seul point. Donc le crible $C_{m_1 m_2 \dots m_k}$ a une constituante ayant un et un seul point commun avec P. Le lemme est ainsi démontré.

Ce lemme étant démontré nous introduisons la définition suivante.

Définition. Soit E un complémentaire analytique situé dans le plan OXY, et C un crible définissant E et situé dans l'espace $OXYZ$. Nous dirons qu'un point (x_0, y_0) de E est un point d'indice unique, si la constituante de E qui contient ce point ne possède aucun autre point sur la droite $x = x_0$.

Cette définition posée, on a le

LEMME 2. *Étant donné un complémentaire analytique quelconque, l'ensemble de ses points d'indice unique est toujours un com-*

plémentaire analytique et il peut être uniformisé au moyen d'un ensemble de même nature.

Ces deux lemmes permettent de démontrer les théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *Soit E un complémentaire analytique jouissant de la propriété suivante: sur chaque parallèle à l'axe OY qui coupe l'ensemble E, la constituante inférieure ayant des points sur cette parallèle est au plus dénombrable. Dans ces conditions la projection de E sur l'axe OX est un ensemble A'_2.*

Corollaire. Si E est un complémentaire analytique qui est au plus dénombrable sur chaque droite parallèle à l'axe OY, la projection de E sur OX est un ensemble A'_2.

Ce théorème peut être généralisé. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble A'_2 et E l'ensemble CA uniforme, dont il est la projection. Convenons d'appéler indice d'un point de $\mathcal{E}$ l'indice du point de E dont il est la projection. L'ensemble A'_2 est ainsi décomposé en $\aleph_1$ constituantes mesurables B de même que les ensembles CA. D'une manière analogue, si $\mathcal{E}$ est un ensemble A_2 et E l'ensemble CA dont il est la projection, on peut appeler indice d'un point de $\mathcal{E}$ l'indice minimum des points de E ayant ce point pour projection.

Ces définitions posées, le théorème I peut être généralisé de la manière suivante:

THÉORÈME II. *Si E est un ensemble A'_2 dont la constituante inférieure est au plus dénombrable sur chaque parallèle à l'axe OY, la projection de E sur l'axe OX est un ensemble A'_2.*

On a aussi les théorèmes suivants:

THÉORÈME III. *Chaque ensemble A_2 est la projection d'un ensemble CA dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OY sont mesurables B.*

THÉORÈME IV. *Chaque ensemble A_2 contenu dans un ensemble A'_2 et tel qu'en chaque point son indice minimum est inférieur à l'indice au même point de l'ensemble A'_2 considéré, est lui-même un ensemble A'_2.*

Nous avons déjà dit que la question très importante sur le rapport entre la famille des ensembles A_2 et des A'_2 reste à résoudre. Il paraissait probable que la famille des A_2 est beaucoup plus vaste que celle des A'_2. Mais les résultats de cet article et de l'article précédent nous montrent que toutes les propriétés connues des ensembles A_2 appartiennent également aux ensembles A'_2. On peut croire que ces familles d'ensembles coïncident. Nous démontrons dans cet article que le problème sur le rapport des familles A_2 et A'_2 est lié à l'étude de la puissance des complémentaires analytiques.

Plus précisément, *si l'on suppose que la famille des ensembles A_2 est plus vaste que celle des ensembles A'_2 on peut démontrer que cha-*

que complémentaire analytique non dénombrable contient un ensemble parfait. La proposition inverse n'est pas démontrée.

En étudiant les problèmes liés à celui de la puissance des ensembles CA, nous avons obtenu le résultat suivant:

si chaque ensemble AC non dénombrable possède une constituante qui contient deux points au moins, tout ensemble CA non dénombrable contient un ensemble parfait.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

П. С. НОВИКОВ

ОТДЕЛИМОСТЬ C-МНОЖЕСТВ *

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье обобщен принцип отражения на случай произвольных решет. Доказаны I и II теоремы отделимости для произвольных тел, инвариантных относительно (A)-операции, в частности для C-множеств.

C-множества являются результатом последовательного применения двух операций: A-операции и взятия дополнения в конечном или счетном числе раз, отправляясь от интервалов [см. (2), стр. 289 и (3)]. В результате применения этих операций получим $\aleph_1$ классов множеств:

$$C_0, \ C_1, \dots, C_n, \dots, C_\omega, \dots, C_\alpha, \dots \dots /\Omega,$$

из которых C_0 представляет собой совокупность аналитических множеств, а класс C_α получается с помощью (A)-операции над дополнениями к множествам классов $C_{\alpha'}$, где $\alpha' < \alpha$. В настоящей работе мы установим следующее свойство множеств класса C_α: каждые два C_α-множества без общей точки отделимы множествами максимального тела этого класса. Этот результат является обобщением известной теоремы Н. Н. Лузина для аналитических множеств. Для доказательства этого предложения нам нужно будет усилить принцип отражения [см. (2), стр. 211—215, или (4)]. Для этой цели мы введем некоторые вспомогательные понятия.

Рассмотрим совокупность всех рациональных чисел и представим ее в виде последовательности

$$r_1, \ r_2, \ \dots, \ r_n, \ \dots \tag{1}$$

Назовем элементарным отражением соответствие, сохраняющее порядок по отношению к величине чисел между двумя конечными группами рациональных чисел

$$r_{n_1}, \ r_{n_2}, \ \dots, \ r_{n_k} \ \text{ и } \ r_{m_1}, \ r_{m_2}, \ \dots, \ r_{m_k}.$$

* Результаты этой работы были эононсированы мною в «Докладах» Академии Наук СССР (1).

Подобное элементарное отражение мы будем записывать в виде следующего символа:

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix},$$

причем будем всегда предполагать, что числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ расположены в возрастающем порядке.

Пусть

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} r_{q_1} & r_{q_2} & \dots & r_{q_t} \\ r_{s_1} & r_{s_2} & \dots & r_{s_t} \end{pmatrix}, \quad k > t$$

два элементарных отражения. Мы скажем, что первое есть продолжение второго, если

$$n_1 = q_1, \; n_2 = q_2, \; \dots, \; n_t = q_t,$$
$$m_1 = s_1, \; m_2 = s_2, \; \dots, \; m_t = s_t.$$

Пусть дано отражение

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix}.$$

Число k мы назовем рангом отражения. Будем считать, что два отражения совпадают тогда и только тогда, когда изображающие их символы тождественны.

Рассмотрим систему интервалов $\{\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$, обладающую следующими свойствами:

$$\delta_{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}$$

не имеют попарно общих точек, если $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ фиксированы, а q принимает значения $1, 2, 3, \dots$,

$$\delta_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset \delta_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}.$$

Пусть, кроме того, среди всех этих интервалов нет двух одинаковой длины.

Поставим во взаимно-однозначное соответствие элементарные отражения первого ранга и интервалы δ_{n_1} первого ранга. Предположим, что каким-то образом мы установили взаимно-однозначное соответствие между отражениями k-го ранга и интервалами $\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}$ k-го ранга.

Пусть

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix} = (a)$$

некоторое отражение k-го ранга и $\delta_{n_1 n_2 \dots n_k}$ соответствующий ем интервал.

Рассмотрим совокупность отражений

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} & r_{n_{k+1}} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} & r_{m_{k+1}} \end{pmatrix},$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k$ и $m_1, m_2, \dots, m_k$ фиксированы, n_{k+1} пробегает все целые числа $> n_k$, а m_{k+1} при всяком n_{k+1} пробегает все те значения, при которых сохраняется подобие. Установим взаимно-однозначное соответствие между этой совокупностью и совокупностью всех интервалов $\delta_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}$, где $i_1, i_2, \dots, i_k$ фиксированы, а i_{k+1} принимает все целые значения.

Таким образом мы поставили во взаимно-однозначное соответствие множество всех элементарных отражений и множество всех интервалов $\delta_{i_1 \dots i_k}$. Это соответствие, очевидно, обладает следующими свойствами:

Если из двух отражений одно есть продолжение другого, то интервал, соответствующий второму, содержится в интервале, соответствующем первому, и обратно: если два интервала вложены один в другой, то соответствующие отражения представляют продолжение одно другого.

Двум различным отражениям одного и того же ранга отвечают неперекрывающиеся интервалы того же ранга, и обратно.

Две последовательности рациональных чисел, взятые в определенном порядке, определяют систему интервалов $\delta_{p_1 p_2 \dots p_k}$, отвечающих отражениям

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} \end{pmatrix},$$

где $r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_k}$ суть первые k членов первой последовательности, а $r_{m_1}, r_{m_2}, \dots, r_{m_k}$ принадлежат второй последовательности причем $n_1 < n_2 < \dots < n_k$.

Множество

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} \delta_{p_1 p_2 \dots p_k} = h$$

не пусто тогда и только тогда, когда вся первая последовательность отражается подобно на часть второй *.

В самом деле, пусть первая последовательность $r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_k}, \dots$ отражается подобно на часть второй; пусть $r_{m_1}, r_{m_2}, \dots r_{m_k}, \dots$ будет эта часть. Запишем это отражение в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} & \dots & r_{n_k} & \dots \\ r_{m_1} & r_{m_2} & \dots & r_{m_k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда существует бесконечная последовательность элементарных отражений вида (a):

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} \\ r_{m_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} \\ r_{m_1} & r_{m_2} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

---

* Множество h есть произведение по k сумм всех интервалов $\delta_{p_1 \dots}$ ранга k.

составляющих продолжение одно другого. Но тогда в силу установленного соответствия между отражениями и интервалами $\delta_{n_1 \ldots n_k}$ мы будем иметь последовательность интервалов δ_{p_1}, $\delta_{p_1 p_2}$, $\ldots$, вложенных один в другой. Следовательно, пересечение их не пусто, и так как точка, являющаяся их пересечением, входит в h, то h не пусто. Обратно, предположим, что h не пусто. Тогда существует последовательность интервалов $\delta_{p_1} \supset \delta_{p_1 p_2} \supset \ldots$; но тогда существует последовательность отражений, отвечающих этим интервалам и составляющих продолжение одно другого:

$$\begin{pmatrix} r_{n_1} \\ r_{m_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{n_1} & r_{n_2} \\ r_{m_1} & r_{m_2} \end{pmatrix}, \ldots$$

Очевидно, последовательность r_{n_1}, r_{n_2}, ... отражается подобно на последовательность r_{m_1}, r_{m_2}, ..., которая есть часть второй из рассматриваемых нами последовательностей.

Пусть π есть некоторый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, c — некоторое множество, расположенное на одной из его сторон. Множество точек прямоугольника π, проектирующихся ортогонально в c, мы будем называть гребенчатым множеством или гребенкой. Само множество c мы назовем основанием гребенки.

Легко видеть, что если мы имеем проекцию на ось OX пересечения счетного числа счетных сумм гребенок, то эту проекцию можно представить как (A)-операцию над множествами, являющимися проекциями гребенок на ось OX, и обратно. Поэтому, если все гребенки суть C-множества класса α, то рассматриваемая проекция пересечения будет тоже C-множество класса α.

Обозначим через $P_y^{x_0}$ перпендикуляр к оси OX в точке x_0.

Мы докажем следующую лемму:

ЛЕММА. *Пусть C_1 и C_2 суть два решета, составленные из C-множеств класса α, принадлежащих максимальному телу этого класса и расположенных на отрезках, параллельных оси OX с рациональными ординатами; тогда совокупность тех точек x_0 оси OX, для которых $P_y^{x_0} \cdot C_1$ отражается подобно на часть множества $P_y^{x_0} \cdot C_2$, есть C-множество класса α.*

Доказательство. Мы будем в дальнейшем обозначать множество точек x_0, удовлетворяющих условиям леммы, через L.

Рассмотрим квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$. Мы можем предполагать, что оба решета C_1 и C_2 содержатся внутри этого квадрата. Пусть x_0 точка оси OX; тогда множества $P_y^{x_0} \cdot C_1$ и $P_y^{x_0} \cdot C_2$, которые мы в дальнейшем будем называть множествами вида (c), представляют собой две совокупности рациональных точек и являются частями последовательности (1).

Таким двум счетным частям, рассмотренным как последовательности с членами, занумерованными теми же номерами, какие

Отсюда очевидно

$$J_1 \leqslant A \int_0^1 (1-z)^{\varkappa_3} (1-\eta^{(01)} z)^{\delta} \, dz.$$

Если $\varkappa_3 + \delta + 1 > 0$, то $J_1 \leqslant A \int\limits_0^1 (1-z)^{\varkappa_3+\delta} \, dz \leqslant C$.

Если $\varkappa_3 + \delta + 1 < 0$, то мы получим, разбивая интеграл на два слагаемых,

$$J_1 = \int_0^{\eta^{(01)}} (1-z)^{\varkappa_3} (1-\eta^{(01)} z)^{\delta} \, dz + \int_{\eta^{(01)}}^1 (1-z)^{\varkappa_3} (1-\eta^{(01)} z)^{\delta} \, dz;$$

в первом слагаемом $(1-\eta^{(01)} z) > (1-z)$

$$\int_0^{\eta^{(01)}} (1-z)^{\varkappa_3} (1-\eta^{(01)} z)^{\delta} \, dz \leqslant \int_0^{\eta^{(01)}} (1-z)^{\varkappa_3+\delta} \, dz \leqslant$$

$$\leqslant A \left[(1-\eta^{(01)})^{\varkappa_3+\delta+1} + 1 \right];$$

во втором слагаемом $(1-\eta^{(01)} z) > 1-\eta^{(01)}$

$$\int_{\eta^{(01)}}^1 (1-z)^{\varkappa_3} (1-\eta^{(01)})^{\delta} \, dz \leqslant A \, (1-\eta^{(01)})^{\varkappa_3+\delta+1}.$$

Отсюда

$$J_1 \leqslant A \left[(1-\eta^{(01)})^{\varkappa_3+\delta+1} + 1 \right]. \tag{65}$$

Оценка J_2 сводится к оценке интеграла

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 dz \left\{ \int_0^{-\frac{1}{2}} [(1-\tau)^2 - z^2 (1+\tau)^2]^{\varkappa_3} (1-z^2)^{\iota_3} \times \right.$$

$$\left. \times \left[(1-\tau) - z\eta^{(01)} (1+\tau) \right]^{\delta} d\tau \right\}, \tag{66}$$

от которого он отличается лишь на ограниченное слагаемое, ибо при z далеких от 1, или τ далеких от нуля, подинтегральная функция в J_2 имеет абсолютную оценку. Полагая $1-z=w$, $1-\eta=v$, сведем оценку интеграла (66) к оценке интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dw \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^0 [w - \tau (2-w)]^{\varkappa_3} w^{\iota_3} \times \right.$$

$$\left. \times \left[v + w - vw - [2 - v - w + vw] \tau \right]^{\delta} d\tau \right\}.$$

Заменяя здесь $(2-w)\tau = \tau'$, мы видим, что этот последний интеграл не превосходит

$$\int_0^{\frac{1}{2}} w^{\iota_3}\,dw \left\{ \int_{-1}^{0} (w-\tau')^{\varkappa_3} \left[v + w(1-v) - \tau' \left(1 + v\,\frac{1-w}{2-w}\right)\right]^{\delta} d\tau \right\}.$$

Так как при $v < \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} < 1 - v < 1 \qquad \frac{1}{2} < 1 + v\,\frac{1-w}{2-w} < 1,$$

то при $\delta < 0$

$$\left[v + w(1-v) - \tau'\left(1 + v\,\frac{1-w}{2-w}\right)\right]^{\delta} < \frac{1}{2\delta}\,[2v + w - \tau']^{\delta} <$$
$$< \frac{1}{2\delta}\,[v' + w - \tau']^{\delta}, \quad \text{где } v' = 2v,$$

а при $\delta > 0$

$$\left[v + w(1-v) - \tau'\left(1 + v\,\frac{1-w}{2-w}\right)\right]^{\delta} < [v + w - \tau']^{\delta}.$$

Таким образом нам остается оценить интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} w^{\iota_3}\,dw \left\{ \int_{-1}^{0} (w-\tau')^{\varkappa_3} (v + w - \tau')^{\delta} d\tau' \right\}$$

Вводя в него новые переменные w и $\lambda = w - \tau'$, после перестановки порядка интегрирования легко сведем его оценку к оценке

$$\int_0^1 \lambda^{\varkappa_3 + \iota_3 + 1} (v + \lambda)^{\delta} d\lambda \leqslant A\,(v^{\iota_3 + \varkappa_3 + \delta + 2} + 1).$$

Отсюда имеем оценку для интеграла (62) в виде

$$\iint\limits_{\substack{0<\chi<1 \\ -1+\chi<\tau<1-\chi}} [(1-\tau)^2 - \chi^2]^{\varkappa_3} [(1+\tau)^2 - \chi^2]^{\iota_3} \times$$
$$\times \chi^{\alpha} (1-\tau)^{\beta} (1+\tau)^{\gamma} (1 - \tau - \eta^{(01)}\chi)^{\delta} d\chi\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant A_1 \left\{ (1-\eta^{(01)})^{\varkappa_3 + \delta + 1} + (1-\eta^{(01)})^{\varkappa_3 + \iota_3 + \delta + 2} + 1 \right\} \leqslant$$
$$\leqslant A \left\{ (1-\eta^{(01)})^{\varkappa_3 + \delta + 1} + 1 \right\}. \tag{67}$$

Сопоставляя интегралы (57) с оценкой (67), мы получим окончательную оценку для интеграла J в виде

$$J \leqslant A \left\{ (1-\eta^{(01)})^{\varkappa_2 + \varkappa_3 + \frac{n+1}{2}} + (1-\eta^{(01)})^{\iota_2 + \iota_3 + \frac{n+1}{2}} + 1 \right\},$$

годную во всех без исключения случаях.

9. Оценка производных от $K^{(01)}$

Возвращаясь к формуле (48) и интегрируя обе ее части по $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \tau$, мы получим в силу (66) и (49)

$$\left| \underbrace{\int \cdots \int}_{\substack{0<\chi<1 \\ -1+\chi<\tau<1-\chi}}^{n+1} \left\{ \frac{\partial^r (\overline{K}^{(02)} \overline{K}^{(21)})}{\partial \xi_0^{(01)\alpha_0} \partial \eta^{(01)\alpha_1} \ldots \partial \varphi^{(01)\alpha_n} \partial t^{(0)\beta_0} \ldots \partial x_n^{(0)\beta_n}} \right\} d\zeta_1 d\zeta_2 \ldots d\zeta_n \, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant A \xi_0^{(01)\,\lambda^{(02)}+\lambda^{(21)}-\alpha_0} \sum (1-\eta^{(01)})^{\varkappa_1+\iota_1} \left\{ (1-\eta^{(01)})^{\varkappa_2+\varkappa_3+\frac{n+1}{2}} + \right.$$

$$\left. + (1-\eta^{(01)})^{\iota_2+\iota_3+\frac{n+1}{2}} + 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant A \xi_0^{(01)\,\lambda^{(02)}+\lambda^{(21)}-\alpha_0} \left\{ (1-\eta^{(01)})^{\lambda^{(02)}+\mu^{(21)}+\frac{n+1}{2}-\alpha_1} + \right.$$

$$\left. + (1-\eta^{(01)})^{\lambda^{(21)}+\mu^{(02)}+\frac{n+1}{2}-\alpha_0} + (1-\eta^{(01)})^{\mu^{(02)}+\mu^{(21)}-\alpha_1} \right\}$$

Отсюда и из (34) на основании совершенно элементарных выкладок будем иметь при $\eta^{(01)} > \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{\partial^m \overline{K}^{(01)}}{\partial \xi_0^{(01)\alpha_0} \partial \eta^{(01)\alpha_1} \partial \vartheta_1^{(01)\alpha_2} \ldots \partial \varphi^{(01)\alpha_n} \partial t^{(0)\beta_0} \partial x_1^{(0)\beta_1} \ldots \partial x_n^{(0)\beta_n}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A \xi_0^{(01)\,\lambda'-\alpha_0} (1-\eta^{(01)})^{\mu'-\alpha_1}, \tag{68}$$

где $\lambda' = \lambda^{(02)} + \lambda^{(21)} + n + 1$,

$$\mu' = \min\Big(\lambda^{(02)} + \mu^{(21)} + n + 1, \lambda^{(21)} + \mu^{(02)} + n + 1,$$

$$\mu^{(02)} + \mu^{(21)} + \frac{n+1}{2}\Big).$$

Совершенно элементарным путем получится и неравенство

$$\left| \frac{\partial^m \overline{K}^{(01)}}{\partial \xi_0^{(01)\alpha_0} \partial \eta_1^{(01)\alpha_1} \partial \eta_2^{(01)\alpha_2} \ldots \partial \eta_n^{(01)\alpha_n} \partial t^{(0)\beta_0} \ldots \partial x_n^{(0)\beta_n}} \right| \leqslant A \xi_0^{(01)\,\lambda'-\alpha_0} \tag{69}$$

при $\eta^{(01)} < \frac{1}{2}$.

Лемма III доказана.

Вернемся теперь к нашим ядрам $K^{(01)}_{r_0 \ldots r_n}(M^{(0)}, t^{(0)}; \; M^{(1)}, t^{(1)})$, определенным выше [см. (26)].

Неравенства (68) и (69) дают возможность высказать аналогичные неравенства и для ядер $K^{(01)}_{r_0 \ldots r_n}(M^{(0)}, t^{(0)}; \; M^{(1)}, t^{(1)})$.

Пусть в формуле (27) $p_0 + p_1 + \ldots + p_n = s$, $q_0 + \ldots + q_n = l$. Обозначим через r сумму $r = r_0 + r_1 + \ldots + r_n$ в формуле (26).

Применяя наши оценки к формуле (27) и заменяя $\lambda^{(02)}$ и $\lambda^{(21)}$ через $\rho_1^{(02)} + s - n - 1$ и $\rho_1^{(21)} + l - n - 1$, а $\mu^{(02)}$ и $\mu^{(21)}$ через $\rho_2^{(02)} + s - \frac{n+1}{2}$ и $\rho_2^{(21)} + l - \frac{n+1}{2}$ согласно определению индексов регулярности, мы получим

$$\left| \frac{\partial^m \overline{K}^{(01)}_{r_0 \ldots r_n}}{\partial \xi_0^{(01)\alpha_0} \partial \eta^{(01)\alpha_1} \partial \vartheta_1^{(01)\alpha_2} \ldots \partial \varphi^{(01)\alpha_n} \partial t^{(0)\beta_0} \partial x_1^{(0)\beta_1} \ldots \partial x_n^{(0)\beta_n}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A \xi_0^{(01)\,\lambda^{(01)}_{r_0 \ldots r_n}-\alpha_0} \cdot (1-\eta^{(01)})^{\mu^{(01)}_{r_0 \ldots r_n}-\alpha_1}, \tag{70}$$

где $\lambda^{(01)}_{r_0 \ldots r_n} \geqslant \rho_1^{(02)} + \rho_1^{(21)} + l + s - n - 1,$

$\mu^{(01)}_{r_0 \ldots r_n} \geqslant \min\ (\rho_2^{(02)} + \rho_1^{(21)},\ \rho_2^{(21)} + \rho_1^{(02)},\ \rho_2^{(02)} + \rho_2^{(21)}) + l + s - \frac{n+1}{2}$

при $\eta^{(01)} \geqslant \frac{1}{3}$

и

$$\left| \frac{\partial^m \overline{K}^{(01)}_{r_0 \ldots r_n}}{\partial \xi_0^{(01)\alpha_0} \partial \eta_1^{(01)\alpha_1} \ldots \partial \eta_n^{(01)\alpha_n} \partial t^{(0)\beta_0} \partial x_1^{(0)\beta_1} \ldots \partial x_n^{(0)\beta_n}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A \xi_0^{(01)^{\lambda^{(01)}_{r_0 \ldots r_n} - \alpha_0}} \tag{71}$$

Из этих неравенств немедленно вытекает доказательство теоремы I, высказанной в § 2, если мы заметим, что

$$l + s \geqslant r.$$

В самом деле, $\rho_1^{(01)}$ и $\rho_2^{(01)}$, определенные формулами (70), очевидно удовлетворяют соотношениям

$$\rho_1^{(01)} \geqslant \rho_1^{(02)} + \rho_1^{(21)},\ \ \rho_2^{(01)} \geqslant \min(\rho_1^{(02)} + \rho_2^{(21)},\ \rho_1^{(21)} + \rho_1^{(02)},\ \rho_2^{(02)} + \rho_2^{(21)}).$$

Теорема I доказана.

10. Степени данной операции. Решение интегродифференциальных уравнений для регулярного случая

Из теоремы I вытекает несколько важных следствий, которые мы и отметим.

Следствие. *В ряду степеней данной операции $\mathfrak{L}$, оба индекса которой положительны, индексы регулярности растут неограниченно.*

Прежде чем формулировать дальнейшие утверждения, рассмотрим еще некоторое регулярное ядро R с показателями λ и μ.

Нам необходимо будет получить еще одну оценку для производных от R. Рассматривая $t^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ как постоянные, нам нужно изучить, к чему сводится операция дифференцирования по $t^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$. Очевидно, что при этом

$$\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}} = -\frac{1}{t^{(0)} - t^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \eta_i^{(01)}} = \frac{1}{\xi_0^{(01)}} \frac{\partial}{\partial \eta_i^{(01)}} =$$

$$= \frac{1}{\xi_0^{(01)}} \left\{ P^{(i)} (\vartheta_1^{(01)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(01)}) \frac{\partial}{\partial \eta^{(01)}} + \sum_{j=1}^{n-1} P^{(i,j)} (\vartheta_1^{(01)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(01)}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_i^{(01)}} \right\};$$

$$\frac{\partial}{\partial t^{(1)}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_0^{(01)}} - \sum \frac{\eta_i^{(01)}}{t^{(0)} - t^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \eta_i^{(01)}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \xi_0^{(01)}} - \frac{\eta^{(01)}}{t^{(0)} - t^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \eta^{(01)}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_0^{(01)}} - \frac{\eta^{(01)}}{\xi_0^{(01)}} \frac{\partial}{\partial \eta^{(01)}}, \tag{72}$$

где $P^{(i)}$ и $P^{(i,j)}$—тригонометрические полиномы своих аргументов.

Если мы теперь обозначим

$$\frac{\partial^r R}{\partial t^{(1)^{r_0}} \partial x_1^{(1)^{r_1}} \dots \partial x_n^{(1)^{r_n}}} = R^{(r)},$$

то для ядра $R^{(r)}$ получатся формулы:

$$\left.\begin{aligned} \left| \frac{\partial^m \overline{R}^{(r)}}{\partial \xi_0^{(01)^{\alpha_0}} \partial \eta^{(01)^{\alpha_1}} \partial \vartheta_1^{(01)^{\alpha_2}} \dots \partial x_n^{(0)^{\beta_n}}} \right| &\leqslant A \xi_0^{(01)^{\lambda' - r - \alpha_0}} (1 - \eta^{(01)})^{\mu' - r - \alpha_1} \\ &\text{при } \eta^{(01)} > \frac{1}{2}, \\ \left| \frac{\partial^m \overline{R}^{(r)}}{\partial \xi_0^{(01)^{\alpha_0}} \partial \eta_1^{(01)^{\alpha_1}} \partial \eta_2^{(01)^{\alpha_2}} \dots \partial x_n^{(0)^{\beta_n}}} \right| &\leqslant A \xi_0^{(01)^{\lambda' - r - \alpha_0}} \\ &\text{при } \eta^{(01)} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Мы получим следующее утверждение:

ЛЕММА IV. *Дифференцирование ядра R по переменным $t^{(1)}$, $x^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ понижает оба показателя этого ядра на столько единиц, каков порядок дифференцирования.*

Пусть теперь в некоторой операции M некоторое количество ядер $K_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ уничтожается на поверхности конуса (при $\eta^{(01)} = 1$) вместе с производными, а при $\xi_0^{(01)} = 0$ возрастает вместе с производными медленнее, чем $\xi_0^{(01)^{-n}}$. Класс функций, на который действует операция, возьмем так, чтобы эти функции уничтожались вместе с несколькими производными при $t^{(0)} = 0$.

Тогда соответствующие члены могут быть проинтегрированы по частям, причем порядок производных от неизвестных функций понижается, а ядра заменяются их производными. Внутри такого класса функций наша операция очевидно эквивалентна другой, более простой. Из леммы IV вытекает при этом важное следствие.

Следствие I. *Индексы регулярности операций, полученных из данной операции M интегрированием по частям, если таковое возможно, совпадают с индексами регулярности самой операции M.*

В самом деле, в оценках (7) и (8) степени $\xi_0^{(01)}$ и $\eta^{(01)}$ уменьшатся на столько же единиц, на сколько уменьшится порядок s соответствующей производной.

Отсюда вытекает сразу

Следствие II. *В классе функций, уничтожающихся при $t^{(0)} = 0$ с достаточным количеством производных, регулярная интегродифференциальная операция эквивалентна интегральной*, если

$$\rho_1 > 1, \quad \rho_2 > \frac{n-1}{2}. \quad (74)$$

В самом деле, описанное нами интегрирование по частям можно производить до тех пор, пока в получаемых уравнениях:

$$\mu = \rho_2 + s - \frac{n+1}{2} > -1; \quad \lambda = \rho_1 + s - n - 1 > -n, \quad (75)$$

ибо до этих пор будет иметь смысл полученный интеграл и будут сокращаться внеинтегральные члены.

Из неравенств (75) следует:

$$s > \frac{n-1}{2} - \rho_2, \qquad s > 1 - \rho_1. \tag{76}$$

Если имеют место (74), то интегрирование возможно вплоть до значения $s = 0$, что и доказывает наше утверждение.

Сопоставляя теперь следствие из теоремы I и следствие II из леммы IV, приходим к заключению, которое удобно сформулировать в виде теоремы:

ТЕОРЕМА II. *Для любой интегродифференциальной операции $\mathfrak{L}$, регулярной с положительными индексами, существует ее некоторая степень, которая эквивалентна интегральной операции для класса функций, уничтожающихся при $t^{(0)} = 0$ с достаточным количеством производных.*

Доказанная теорема позволяет легко привести решение интегродифференциального уравнения (23) к решению некоторого интегрального. Совершая над этим уравнением некоторое количество итераций, мы дадим ему вид:

$$u_1 = \sum_{j=k+1}^{k+h} \mathfrak{L}^j f + \mathfrak{L}^h u_1. \tag{77}$$

Уравнение (77) эквивалентно интегральному и разрешимо по методу последовательных приближений. Если исходное уравнение (2) имело решение, то это решение очевидно будет удовлетворять (77) и, решая (77), мы найдем это решение. Остается доказать существование решения у уравнения (2).

11. Существование решений у интегродифференциальных уравнений с положительными индексами регулярности

Если ψ уничтожается с достаточным количеством производных при $t^{(0)} = 0$, то при достаточно большом h функция $\mathfrak{L}^h \psi$ на основании предыдущего может быть представлена в виде

$$\psi_h = \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \mathrm{K}_h (M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)}) \, \psi (M^{(1)}, t^{(1)}) \, dM^{(1)} \, dt^{(1)}, \tag{78}$$

где ядро K_h обращается в нуль вместе со всеми производными до определенного порядка N на границе области интегрирования.

При этом все производные от ψ_h до порядка N могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial^{\alpha} \psi_h (M^{(0)}, t^{(0)})}{\partial t^{(0)\alpha_0} \partial x_1^{(0)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(0)\alpha_n}} =$$

$$= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \frac{\partial^{\alpha} \mathrm{K}_h (M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(0)^{\alpha_0}} \partial x_1^{(0)^{\alpha_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\alpha_n}}} \psi (M^{(1)}, t^{(1)})\, dM^{(1)}\, dt^{(1)}. \qquad (79)$$

Перепишем теперь уравнение (77)

$$u_1 (M^{(0)}, t^{(0)}) =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{h+k} \mathfrak{L}^j f + \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \mathrm{K}_h (M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)})\, u_1 (M^{(1)}, t^{(1)})\, dM^{(1)}\, dt^{(1)}. \quad (80)$$

Если мы заметим, что

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} + r^{(01)}} \mathrm{K}_h (M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)})\, \mathfrak{L}^l \psi (M^{(1)}, t^{(1)})\, dM^{(1)}\, dt^{(1)} = \mathfrak{L}^{l+h} \psi, \quad (81)$$

то отсюда будет следовать, что решение уравнения (80) или (77 представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$u_1 (M^{(0)}, t^{(0)}) = \sum_{j=k}^{\infty} \mathfrak{L}^j f. \qquad (82)$$

Из формулы (82) мы получим для функции u, дающей решение уравнению (2), ряд:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{L}^j f. \qquad (83)$$

Ряд (83) сходится равномерно вместе с производными любого порядка меньшего N, ибо для всех его членов, начиная с $j = h$, имеет место представление

$$\frac{\partial^{\alpha} \mathfrak{L}^j f (M^{(0)}, t^{(0)})}{\partial t^{(0)^{\alpha_0}} \partial x_1^{(0)^{\alpha_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\alpha_n}}} =$$

$$= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \frac{\partial^{\alpha} \mathrm{K}_h (M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(0)^{\alpha_0}} \partial x_1^{(0)^{\alpha_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\alpha_n}}} \cdot \mathfrak{L}^{j-h} f (M^{(1)}, t^{(1)})\, dM^{(1)}\, dt^{(1)}. \quad (84)$$

Пользуясь этим, мы можем применить к обеим частям (83) операцию $\mathfrak{L}$, причем к первой части она применима почленно. Мы будем иметь:

$$\mathfrak{L} u = \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{L}^j f \qquad (85)$$

или в силу (83)

$$u = f + \mathfrak{L} u. \qquad (86)$$

Уравнение (86) совпадает с (2), следовательно функция $u (M^{(0)}, t^{(0)})$, определяемая рядом (83), удовлетворяет уравнению (2),

которое таким образом разрешимо по методу последовательных приближений, что и требовалось доказать.

Таким образом доказана основная теорема:

ТЕОРЕМА III. *Уравнение* (2) *для регулярной операции* $\mathfrak{L}$ *с положительными индексами разрешимо и имеет единственное решение, которое можно построить по методу последовательных приближений.*

12. Общие замечания

Метод, примененный нами, распространим принципиально на значительно более широкий класс интегродифференциальных уравнений.

Укажем, в частности, на функциональное уравнение

$$u(M^{(0)}, t^{(0)}) = f(M^{(0)}, t^{(0)}) +$$

$$+ \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{r^{(01)} \leqslant h} \sum K_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \frac{\partial^s u(M^{(1)}, t^{(1)} - k)}{\partial x_1^{(1)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(1)\alpha_n}} dM^{(1)}, \qquad (87)$$

разрешимое указанным приемом, если $s < \frac{n+1}{2}$ и K ограничено. Это уравнение находится в близкой связи с вопросом о решении гиперболических уравнений в частных производных методом конечных разностей.

Как мы покажем во II части, и уравнение (3) и уравнение (87) остаются разрешимыми и при $\rho_2 = 0$, если соблюдены некоторые дополнительные условия. Это позволяет объяснить еще раз тот казавшийся долгое время парадоксальным факт, что при решении гиперболических уравнений по методу конечных разностей, разделяя пространство на слои, мы каждый раз не теряем число производных, имевшихся уже на первом слое.

Наконец, следует еще заметить, что область строго конической формы не является наивыгоднейшей с точки зрения числа производных, допустимых в интегродифференциальном уравнении. Для областей другой формы число производных при ограниченном ядре может быть повышено до $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

При этих условиях метод становится применимым, например, к решению краевых задач теории гиперболических уравнений методом теории запаздывающих потенциалов. Как указано Г. М. Мюнтцем *, эти задачи сводятся именно к такого рода интегродифференциальным уравнениям.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
25. V. 1937.

* Ch. Müntz, Zur Theorie der Randwertaufgaben bei hyperbolischen Gleichungen, Prace Matem.-Fiz., XLIII, Warszawa 1935.

S. SOBOLEFF. SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTEGRODIFFERENTIELLES

RÉSUMÉ

Dans cet article on considère l'équation integrodifferentielle du type

$$u(M^{(0)}, t^{(0)}) = f(M^{(0)}, t^{(0)}) +$$

$$+ \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum_{\Sigma \alpha_i = \alpha} K_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times \frac{\partial^s u(M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)\alpha_0} \ldots \partial t_n^{(1)\alpha_n}} dM^{(1)} dt^{(1)}; \tag{1}$$

$M^{(0)}, t^{(0)}$ et $M^{(1)}, t^{(1)}$ étant deux points de l'espace $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$.

Les noyaux K doivent vérifier les deux conditions suivantes:

1. Si l'on considère les noyaux K comme fonctions des variables suivantes:

$$\xi_0 = t^{(0)} - t^{(1)}; \; \eta = \frac{\sqrt{\Sigma (x_i^{(0)} - x_i^{(1)})^2}}{t^{(0)} - t^{(1)}}, \; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-2}, \varphi, t^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \tag{2}$$

$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-2}, \varphi$ étant les angles polaires de l'espace à n dimensions, les dérivées de K par rapport à tous ces variables satisfont pour $\eta \geqslant \frac{1}{2}$ aux conditions

$$\left| \frac{\partial^m K_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}}{\partial \xi_0^{\beta_0} \partial \eta^{\beta_1} \ldots} \right| \leqslant A \xi_0^{\lambda - \beta_0} (1 - \eta)^{\mu - \beta_1} \tag{3}$$

$$\lambda + n + 1 > 0, \quad \mu + 1 > c, \quad m \leqslant N.$$

2. Si l'on considère les noyaux K comme fonctions des variables:

$$\xi_0, \; \eta_i = \frac{x_i^{(0)} - x_i^{(1)}}{t^{(0)} - t^{(1)}}, \; t^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)},$$

les dérivées de K par rapport à toutes ces variables satisfont pour $\eta \leqslant \frac{1}{2}$ aux conditions:

$$\left| \frac{\partial^m K}{\partial \xi_0^{\beta_0} \partial \eta_1^{\beta_1} \ldots \partial \eta_n^{\beta_n} \ldots} \right| \leqslant A \xi_0^{\lambda - \beta_0} \quad (m \leqslant N). \tag{4}$$

Soit $\rho_1 = \min \left(\lambda + n + 1 - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \right)$ et $\rho_2 = \min \left(\mu + \frac{n+1}{2} - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \right)$.

On demontre que dans le cas où les paramètres ρ_1 et ρ_2 sont des nombres positifs l'équation (1) peut être résolue par la méthode des approximations successives.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

М. КЕЛДЫШ и М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе рассматривается вопрос об устойчивости решений задачи Дирихле при малых деформациях границы области. Устанавливаются критерии устойчивости и дается приложение результатов к вопросам апроксимации функций рядами гармонических полиномов.

Пусть D произвольная односвязная область трехмерного пространства, удовлетворяющая условиям разрешимости проблемы Дирихле при любых непрерывных граничных условиях. Из принципа максимума непосредственно следует, что всякое решение задачи Дирихле для области D будет устойчивым относительно заданий на границе, т. е. при равномерно малой вариации граничных условий будет также равномерно мала вариация решения проблемы Дирихле.

В настоящей статье, ограничиваясь случаем, когда граница D есть простая замкнутая поверхность Жордана, мы исследуем вопрос об устойчивости проблемы Дирихле при варьировании границы области D. В первой главе мы уточняем постановку задачи об устойчивости и доказываем ряд вспомогательных предложений. Во второй главе мы устанавливаем связь между различными понятиями устойчивости и разрешимостью проблемы Дирихле. В третьей главе мы даем пример области, для которой проблема Дирихле всегда разрешима, но не все решения которой устойчивы. В четвертой главе мы приводим необходимые и достаточные условия устойчивости в терминах, близких к условиям Wiener'а, разрешимости проблемы Дирихле; здесь же мы приводим один простой геометрический признак, достаточный для устойчивости. В последнем разделе мы даем приложения развитой теории к задаче апроксимации гармонических функций рядами гармонических полиномов.

Формулировки основных результатов данной статьи были нами опубликованы в «Comptes Rendus», t. 204, p. 1788 (1937).

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

§ 1. Обозначения и основная конструкция

Во всем дальнейшем через D мы будем обозначать односвязную область пространства трех измерений, ограниченную простой замкнутой поверхностью S. Каждой поверхности мы отнесем две последовательности простых замкнутых аналитических поверхностей

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \tag{1}$$

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots, \tag{2}$$

обладающих следующими свойствами: 1) каждая из этих последовательностей равномерно сходится к поверхности S*, 2) поверхность s_n принадлежит области D и области d_{n+1}, ограниченной поверхностью s_{n+1}; поверхность S_n расположена вне области D, причем принадлежит области D_{n-1}, ограниченной поверхностью S_{n-1}. Таким образом, последовательности областей

$$d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots, \tag{3}$$

$$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots \tag{4}$$

сходятся к области D, причем первая есть монотонно возрастающая, а вторая монотонно убывающая.

Пусть теперь $\varphi(x, y, z) = \varphi(P)$ функция точки $P(x, y, z)$ пространства, определенная и непрерывная в некоторой окрестности поверхности S. Обозначим через $u_{n,\varphi}(P)$ $(U_{n,\varphi}(P))$ гармоническую функцию, правильную в области d_n (D_n) и принимающую в каждой точке Q поверхности s_n (S_n) значение $\varphi(Q)$. Мы получим, таким образом, две последовательности гармонических функций:

$$u_{1,\varphi}(P), u_{2,\varphi}(P), \ldots, u_{n,\varphi}(P), \ldots, \tag{5}$$

$$U_{1,\varphi}(P), U_{2,\varphi}(P), \ldots, U_{n,\varphi}(P), \ldots \tag{6}$$

Покажем, что *каждая из этих последовательностей* (5) *и* (6) *равномерно сходится внутри области* D**. В самом деле, так как функции последовательностей (5) и (6) ограничены в своей совокупности, то, следовательно, (5) и (6) компактны; нам достаточно доказать их сходимость внутри D. С другой стороны, в силу принципа максимума, если две функции $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ отличаются всюду не больше, чем на ε, то модули разностей

---

* Последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ равномерно сходится к поверхности S

$$S_n \rightrightarrows S \text{ при } n \to \infty,$$

если выполняется следующее условие: какова бы ни была последовательность точек $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, где P_n точка поверхности S_n, все ее предельные точки лежат на S.

** Доказательство сходимости ряда (5) можно найти в работах Wiener'a (J. Math. Ph. Massach. Instit., Serie 2, № 78, 1924)

$u_{n,\varphi_1} - u_{n,\varphi_2}$, $U_{n,\varphi_1} - U_{n,\varphi_2}$ также не превосходят ε. Отсюда заключаем, что предложение достаточно доказать для случая, когда $\varphi(P)$ есть полином относительно x, y, z. Заметив это, представим полином $\varphi(P)$ в виде разности двух субгармонических функций $h(P)$ и $g(P)$:

$$\varphi(P) = h(P) - g(P),$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \geqslant 0.$$

Рассмотрим последовательность (6); имеем

$$U_{n,\varphi} = U_{n,h} - U_{n,g},$$

но в силу свойств субгармонических функций всюду внутри области D_n, а следовательно, и на поверхности S_{n+1} будем иметь

$$U_{n,h}(P) \geqslant h(P), \quad U_{n,g}(P) \geqslant g(P),$$

т. е. последовательности $U_{n,h}$ и $U_{n,g}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) суть последовательности не возрастающие и ограниченные. Значит, эти последовательности сходятся, а вместе с ними сходится и последовательность (6). Сходимость последовательности (5) доказывается вполне аналогично.

Из равномерной сходимости последовательностей (5) и (6) следует, что их предельные функции суть гармонические функции, правильные в области D; мы их будем в дальнейшем обозначать, соответственно, через $u_\varphi(P)$ и $U_\varphi(P)$:

$$u_\varphi(P) = \lim_{n\to\infty} u_{n,\varphi}(P),$$

$$U_\varphi(P) = \lim_{n\to\infty} U_{n,\varphi}(P).$$

Отметим сейчас же, что в силу принципа максимума функции $u_\varphi(P)$ и $U_\varphi(P)$ зависят только от вида S, от значений, принимаемых функцией $\varphi(P)$ на поверхности S, и не зависят ни от поведения $\varphi(P)$ в окрестности S (само собой предполагается, что при этом $\varphi(P)$ остается непрерывной в окрестности S), ни от закона образования равномерно сходящихся последовательностей (5) и (6)*.

§ 2. Разрешимость и устойчивость проблемы Дирихле. Гармоническая мера

Введем ряд определений, касающихся, с одной стороны, вопроса разрешимости проблемы Дирихле, и с другой стороны, вопроса устойчивости.

Определение 1. Точка Q поверхности S называется правильной точкой (относительно проблемы Дирихле), если, какова бы ни была непрерывная функция $\varphi(P)$, все предельные значения

* Все отмеченные свойства функции u_φ были впервые получены Wiener'ом (loc. cit.).

функции $u_\varphi(P)$ при $P \to Q$ равны $\varphi(Q)$. Если все точки поверхности S суть правильные точки, то очевидно, что при любой непрерывной функции $\varphi(P)$ функция $u_\varphi(P)$ будет равномерно непрерывна в области D и ее предельные значения на S будут совпадать со значениями $\varphi(Q)$; в этом случае мы будем говорить, что для области D проблема Дирихле всегда разрешима.

Определение 2. Мы скажем, что точка P области D есть точка устойчивости проблемы Дирихле, если для любой непрерывной функции $\varphi(P)$ будем иметь

$$u_\varphi(P) = U_\varphi(P).$$

Если каждая точка области D будет точкой устойчивости, то, в силу доказанного выше (§ 1), для любой непрерывной функции $\varphi(P)$ последовательности (5) и (6) будут равномерно сходиться внутри D к одной и той же функции $u_\varphi(P) \equiv U_\varphi(P)$; в этом случае мы скажем, что проблема Дирихле устойчива внутри области D.

Мы скажем, что точка P поверхности S есть точка устойчивости проблемы Дирихле, если точка P есть правильная точка и если при любой непрерывной функции $\varphi(M)$ имеем

$$\lim_{M \to P} U_\varphi(M) = \lim_{n \to \infty} U_{n,\varphi}(P) = \varphi(P).$$

Если, какова бы ни была непрерывная функция $\varphi(P)$, последовательность (6) будет равномерно сходиться на S к $\varphi(P)$, а внутри D к $u_\varphi(P)$, то мы скажем, что проблема Дирихле устойчива в замкнутой области.

При выяснении связи между разрешимостью проблемы Дирихле и ее устойчивостью на ряду с введенным понятием мы будем существенно пользоваться понятием гармонической меры, хорошо изученным в случае плоской задачи.

Определение 3. Пусть Δ произвольная конечносвязная область, граница Σ которой состоит из конечного числа замкнутых поверхностей Жордана, и пусть F произвольное замкнутое множество поверхности Σ. Построим семейство $\{U(P)\}$ всех супергармонических функций правильных в Δ и таких, что 1) $U(P) \geqslant 0$ всюду в Δ и 2) какова бы ни была точка Q множества F, все предельные значения $U(P)$ при $P \to Q$ не меньше 1. Гармонической мерой множества F в точке P, $P \subset \Delta$, относительно области Δ мы назовем нижнюю границу значений функций $U(P)$ семейства $\{U(P)\}$ в точке P. Это число мы будем обозначать, по аналогии с плоским случаем, через $G(F, \Delta, P)$:

$$G(F, \Delta, P) = \inf \{U(P)\}.$$

Имея понятие гармонической меры замкнутого множества, нетрудно построить всю теорию гармонической меры. Пусть O есть

открытое множество поверхности Σ; за гармоническую меру O мы примем число

$$G(O, \Delta, P) = 1 - G(CO, \Delta, P),$$

где через CO обозначено замкнутое дополнение к множеству O.

Пусть теперь E есть произвольное множество поверхности Σ и пусть $\{O\}$ есть семейство всех открытых множеств, содержащих E. Верхней гармонической мерой множества E мы назовем нижнюю границу гармонических мер множеств O семейства $\{O\}$:

$$\overline{G}(E, \Delta, P) = \inf G(O, \Delta, P).$$

За нижнюю гармоническую меру множества E мы примем число

$$\underline{G}(E, \Delta, P) = 1 - \overline{G}(CE, \Delta, P),$$

где через CE, как раньше, обозначено дополнение к E. Множество E мы будем называть гармонически измеримым, если его верхняя и нижняя гармонические меры совпадают; в этом случае их общее значение мы назовем гармонической мерой множества E:

$$G(E, \Delta, P) = \overline{G}(E, \Delta, P) = \underline{G}(E, \Delta, P). \tag{7}$$

Отметим несколько элементарных свойств гармонической меры, существенных для дальнейшего. Докажем прежде всего, что *гармоническая мера $G(E, \Delta, P)$ измеримого множества E, рассматриваемая как функция точки P, есть гармоническая функция, непрерывная в области Δ.*

Пусть сначала множество E замкнуто. Рассмотрим произвольную сферу σ, содержащуюся в Δ. Заменим каждую функцию U семейства $\{U\}$ непрерывной функцией U', совпадающей с U вне σ и гармонической в σ. Нижняя граница $\{U'\}$ совпадает с нижней границей $\{U\}$; кроме того, семейство $\{U'\}$, будучи ограничено снизу, компактно внутри σ. Следовательно, нижняя граница $\{U'\}$ и $\{U\}$ будет непрерывна в σ, то-есть G непрерывна в Δ. Но так как G, кроме того, есть нижняя граница супергармонических функций, то отсюда следует гармоничность G в Δ. Если теперь E открытое множество, то гармоничность $G(E, \Delta, P)$ следует из равенства $G(E, \Delta, P) = 1 - G(CE, \Delta, P)$. Пусть теперь E есть произвольное гармонически измеримое множество. Построим последовательность открытых множеств O_n, содержащих E, так, чтобы на всюду плотном множестве точек области Δ

$$\lim_{n\to\infty} G(O_n, \Delta, P) = G(E, \Delta, P).$$

Семейство гармонических функций $G(E, \Delta, P)$ нормально. Это влечет за собой выполнение написанного предельного равенства всюду в Δ и гармоничность $G(E, \Delta, P)$. Из доказанного свойства гармонической меры, в частности, следует, что если хотя бы в одной

точке области G обращается в нуль, то она равна нулю тождественно. Таким образом, свойство множества E точек Σ иметь гармоническую меру нуль не зависит от положения точки P в области Δ.

Пусть Δ_1 и Δ_2 две конечные области, содержащие одну и ту же точку P_0, такие, что 1) границы Σ_1 и Σ_2 областей Δ_1 и Δ_2 состоят из конечного числа замкнутых поверхностей Жордана, 2) область Δ_1 содержится в области Δ_2 и 3) существует множество E, принадлежащее одновременно и Σ_1 и Σ_2. При этих условиях, в силу принципа максимума, всегда имеем

$$G(E, \Delta_1, P_0) \leqslant G(E, \Delta_2, P_0), \tag{8}$$

причем если гармоническая мера множества E относительно области Δ_2 отлична от нуля, то знак равенства может достигаться только при совпадении областей Δ_1 и Δ_2.

Из неравенства (8) легко получить следующее предложение, существенное для теории гармонической меры: *всякое открытое множество имеет положительную гармоническую меру.*

В самом деле, пусть O есть произвольное открытое множество поверхности Σ, пусть Q точка этого множества и пусть ρ, $\rho > 0$, есть расстояние от точки Q до множества, дополнительного к O. Фиксируем в области Δ точку P_0, отстоящую от Q не больше, чем на $\frac{1}{3}\rho$, и построим сферу σ с центром в точке P_0 радиуса $\frac{2}{3}\rho$. Пусть O_1 есть часть поверхности сферы σ, расположенная вне $\bar{\Delta}$; тогда, с одной стороны, очевидно имеем

$$G(O_1, \sigma, P_0) > 0;$$

с другой стороны, применяя дважды (8), получим

$$G(O, \Delta, P_0) \geqslant G(O_1, \sigma, P_0),$$

отсюда окончательно

$$G(O, \Delta, P_0) > 0.$$

Опираясь на определение гармонической меры, нетрудно также получить следующее свойство: пусть дана последовательность областей

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots,$$

ограниченных поверхностями Жордана $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$, сходящаяся к Δ и такая, что последовательность

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$$

равномерно сходится к поверхности Σ; пусть, кроме того, на каждой из поверхностей последовательности задана область, на Σ_n область O_n, так что при $n \to \infty$ область O_n равномерно сходится к некоторой области O поверхности Σ, т. е. каждая точка O есть предельная точка для точек O_n, и все предельные точки последова-

тельности $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ такой, что $P_n \subset O_n$ лежат на O, тогда как предельные точки CO_n лежат вне O. При этих условиях для любой точки P_0 области Δ имеем

$$\liminf G(O_n, \Delta_n, P_0) \geqslant G(O, \Delta, P_0).$$

Отметим в заключение еще некоторые предложения относительно гармонической меры, имеющие место в известных теориях мер.

Каково бы ни было гармонически измеримое множество, всегда существует содержащееся в нем замкнутое множество, гармоническая мера которого сколь угодно мало отличается от гармонической меры данного множества.

Если дано счетное число непересекающихся гармонически измеримых множеств, то их сумма будет гармонически измерима, причем ее гармоническая мера будет равна сумме гармонических мер данных множеств.

Если дана счетная последовательность гармонически измеримых множеств таких, что каждое следующее содержится в предыдущем, то их произведение будет гармонически измеримым, причем его гармоническая мера будет равна пределу гармонических мер данных множеств.

§ 3. Апроксимация непрерывной функции на поверхности Жордана

Доказательства ряда предложений об устойчивости задачи Дирихле опираются на следующую теорему *:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Σ простая поверхность Жордана* (гомеоморфная плоскому кругу или сфере) *и $f(P) = f(x, y, z)$ функция, определенная и ограниченная во всем пространстве*

$$|f(x, y, z)| < \omega$$

*и непрерывная вне поверхности Σ. С другой стороны, пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ последовательность областей, сходящаяся к поверхности ** Σ, каждая из которых содержит Σ и ограничена аналитической поверхностью. Через $V_n(P)$ мы обозначим гармоническую функцию, принимающую предельные значения $f(P)$ на границе Σ_n области Δ_n. Если функция $f(P)$ непрерывна на некотором замкнутом множестве E поверхности Σ, то последовательность $V_n(P)$ сходится равномерно к $f(P)$ на E.*

Доказательство этой теоремы основывается на следующей вспомогательной геометрической лемме:

* M. Keldych et M. Lavrentieff, Comptes Rendus, t. 202, 1936; Изв. Тбилисского мат. инст., 1937.

** Т. е. если точка P_n содержится в Δ_n, то все предельные точки последовательности $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ лежат на Σ.

ЛЕММА 1. *Пусть Σ простая поверхность Жордана и $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ последовательность открытых множеств, границы которых $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ состоят из конечного числа аналитических поверхностей. Допустим, что*

1° последовательность $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ сходится к Σ (т. е. если точка P_n принадлежит к O_n, то все предельные точки последовательности $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ лежат на Σ);

2° объем каждого множества O_n превосходит некоторое фиксированное положительное число α.

При этих условиях площади поверхностей H_n неограниченно возрастают вместе с n.

Переходя к доказательству леммы, сделаем прежде всего следующее замечание.

Пусть $\mathcal{E}$ множество континуумов C, расположенных в некоторой плоскости и удовлетворяющих условиям: 1) число областей смежности каждого континуума C превосходит два; 2) два различных континуума C' и C'', принадлежащие $\mathcal{E}$, не имеют общих точек. Тогда множество $\mathcal{E}$ счетно.

В самом деле, каждому континууму C множества $\mathcal{E}$ мы можем поставить в соответствие три квадрата q_1, q_2, q_3, которые принадлежат различным областям смежности континуума C и вершины которых имеют рациональные координаты. Пусть C' и C'' два различных континуума множества $\mathcal{E}$ и (q_1', q_2', q_3'), (q_1'', q_2'', q_3'') соответствующие тройки квадратов. По условию 2) континуум C'' содержится в одной из областей смежности G континуума C' и, следовательно, по крайней мере два из квадратов q_1'', q_2'', q_3'' содержатся в G. С другой стороны, область G содержит только один из квадратов q_1', q_2', q_3'. Отсюда следует, что системы квадратов, соответствующие различным континуумам C' и C'', также различны. Множество всех систем из трех квадратов с рациональными вершинами счетно и, следовательно, à fortiori множество $\mathcal{E}$ счетно.

Пусть теперь F замкнутое плоское множество такое, что каждый континуум C, содержащийся в F, имеет не более двух смежных областей, и пусть K произвольно большое положительное число. Тогда существует открытое множество O, содержащее F и обладающее следующим свойством: какова бы ни была область Ω, ограниченная аналитическими кривыми и принадлежащая O, имеет место неравенство

$$l > K\sigma, \tag{9}$$

где σ есть площадь Ω, а l — длина границы Ω.

В самом деле, пусть P произвольная точка F, а C наибольший континуум, содержащий точку P и принадлежащий множеству F. Континуум C либо не разбивает плоскости (и может, в частности,

выродиться в точку P) либо разбивает плоскость на две части. Обозначим через $\vartheta(C)$ область, содержащую континуум C и обладающую следующими свойствами:

1° Если C не разбивает плоскости, область $\vartheta(C)$ односвязна, в противном случае $\vartheta(C)$ двусвязна.

2° Расстояние от каждой точки $\vartheta(C)$ до континуума C не превышает ρ (ρ—положительное число, которое будет фиксировано ниже).

3° Если Γ часть границы $\vartheta(C)$, принадлежащая одной из областей смежности G континуума C, то расстояние от произвольной точки границы G до Γ не превышает ρ.

4° Граница области $\vartheta(C)$ не содержит точек множества F.

На основании леммы Borel-Lebesgue все множество F может быть покрыто конечным числом областей $\vartheta(C)$. Пусть $\vartheta(C_1)$, $\vartheta(C_2), \ldots, \vartheta(C_n)$ эти области. Обозначим через O открытое множество, получаемое после удаления граничных точек областей $\vartheta(C_1)$, $\vartheta(C_2), \ldots, \vartheta(C_n)$ из суммы этих областей. По построению областей $\vartheta(C_k)$ и на основании свойства 4° областей $\vartheta(C)$ множество O содержит множество F.

Мы докажем, что если число ρ достаточно мало, то построенное открытое множество O обладает указанным выше свойством: какова бы ни была область Ω, ограниченная аналитическими кривыми и содержащаяся в O, имеет место неравенство (9).

Пусть Ω область, содержащаяся в O. Так как O содержится в сумме областей $\vartheta(C_k)$ и не содержит граничных точек этих областей, то область Ω также не содержит граничных точек $\vartheta(C_k)$ и, следовательно, содержится целиком в одной из этих областей. Пусть $\vartheta(C)$ эта область. Мы можем предполагать, что область Ω или односвязна или двусвязна и в последнем случае внутренний контур области Ω не стягивается в точку внутри $\vartheta(C)$. В самом деле, рассмотрим область Ω', ограниченную внешним контуром области Ω и тем из ее внутренних контуров, который не стягивается в точку внутри $\vartheta(C)$ (если такой контур существует). Область Ω' принадлежит $\vartheta(C)$, площадь ее не меньше, чем площадь Ω, а длина границы Ω' не превосходит длины границы Ω. Следовательно, если мы докажем, что для области Ω' удовлетворяется неравенство (9), то тем более это неравенство будет иметь место для Ω.

Для доказательства неравенства (9) мы будем различать два случая.

Случай 1: континуум C или не разбивает плоскость или диаметр внутренней области смежности C превышает 3ρ.

Разобьем всю плоскость на квадраты со стороной ρ. Пусть δ один из построенных квадратов, содержащий точки Ω. В силу свойств 2° и 3° области $\vartheta(C)$ концентрический квадрат δ' со стороной 5ρ должен содержать точку P границы области Ω. Точка P

расположена на одной из граничных кривых области Ω. Пусть Γ эта кривая. Пусть δ'' квадрат, концентрический с δ, со стороной 7ρ, $l(\delta)$ длина дуги $\Gamma(\delta)$ кривой Γ, расположенной внутри δ''. Если $l(\delta) < \rho$, то кривая Γ замкнута и расположена целиком внутри δ'', так как Γ имеет точку на δ'. В этом случае область Ω односвязна и ограничена кривой Γ. В самом деле, диаметр внутренней смежной к C области превышает 3ρ и, следовательно, диаметр всякой не стягиваемой в точку в области $\vartheta(C)$ замкнутой кривой превышает ρ. Применяя изопериметрическую теорему, имеем

$$l > \frac{4\pi}{l}\sigma > \frac{4\pi}{\rho}\sigma. \tag{10}$$

Допустим теперь, что $l(\delta) \geqslant \rho$. Площадь $\sigma(\delta)$ части Ω, содержащаяся в δ, не превосходит ρ^2 и, следовательно, $l(\delta) > \frac{1}{\rho}\sigma(\delta)$. Заметим, что если $l(\delta) \geqslant \rho$ хотя бы для одного квадрата, то это неравенство имеет место для всех квадратов δ, содержащих точки Ω, так как в противном случае, как мы видели выше, длина всей границы Ω не превосходит ρ. С другой стороны, любая точка Ω принадлежит одному из квадратов δ и содержится не более чем в 49 квадратах δ''. Суммируя по всем δ, содержащим точки Ω, получаем

$$l \geqslant \frac{1}{49}\sum l(\delta) \geqslant \frac{1}{49\rho}\sum \sigma(\delta) = \frac{\sigma}{49\rho}. \tag{11}$$

Случай 2: диаметр внутренней области смежности к C не превосходит 3ρ.

Пусть δ квадрат, содержащий точки Ω. Концентрический квадрат со стороной 5ρ содержит в этом случае точку P внешней граничной кривой Γ области Ω. Мы снова рассмотрим квадрат δ'' со стороной 7ρ. Если длина дуги Γ, лежащей в одном из квадратов δ'', не превосходит ρ, то опять имеем оценку (10); в противном случае имеет место оценка (11).

Таким образом, если только $49K\rho < 1$, то неравенство (9) удовлетворено.

Перейдем теперь к доказательству нашей леммы.

Пусть Σ простая поверхность Жордана, заданная уравнениями

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v) \quad (0 \leqslant u, v \leqslant 1).$$

Не ограничивая общности, мы можем предположить всегда, что поверхность Σ содержится в кубе $0 < x, y, z < 1$. Обозначим через F_x множество точек поверхности Σ, расположенное в плоскости $x = \text{const}$. Множество F_x замкнуто. Множество F_x только для счетного числа значений x может содержать континуум, разбивающий плоскость более, чем на две части. В самом деле, в противном случае мы имели бы в плоскости (u, v) несчетное множество соот-

ветствующих континуумов, не имеющих попарно общих точек и каждый из которых разбивал бы плоскость (u, v) более, чем на две части. Пусть E множество значений x таких, что соответствующее множество F_x не содержит континуума, разбивающего плоскость более, чем на две части. Очевидно, $\operatorname{mes} E = 1$.

Рассмотрим последовательность открытых множеств $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$, удовлетворяющих условиям леммы. Мы можем предположить, что границы H_n множеств O_n не содержат плоских участков. Обозначим через O_{nx} плоское открытое множество, состоящее из всех точек O_n, расположенных в плоскости $x = \text{const}$, а через H_{nx} границу множества O_{nx}. Граница H_{nx} состоит из конечного числа аналитических кривых, принадлежащих H_n. Пусть N произвольно большое положительное число, E_n множество всех x, для которых имеет место неравенство

$$\text{длина } (H_{nx}) \geqslant \frac{2N}{\alpha} \text{ площадь } (O_{nx}),$$

где α — число, определенное в условиях леммы.

Из доказанного выше предложения и из сходимости O_{nx} к F_x следует, что $\lim E_n = E$ и поэтому при достаточно больших значениях n имеем

$$\operatorname{mes} E_n > 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Но если выполнено написанное неравенство, то

$$\alpha < \text{объем } (O_n) < \frac{\alpha}{2} + \int\limits_{E_n} \text{площадь } (O_{nx})\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2N} \int\limits_{E_n} \text{длина } (H_{nx})\, dx \leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2N} \text{ площадь } (H_n),$$

откуда

$$\text{площадь } (H_n) > N$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \text{площадь } (H_n) = \infty.$$

Установленная лемма позволяет перейти к доказательству сформулированной теоремы.

Функция $f(x, y, z)$ непрерывна на замкнутом множестве E; следовательно, существует число ρ, обладающее следующим свойством: колебание $f(x, y, z)$ во всякой сфере с центром в точке E и радиуса 3ρ не превосходит заданного наперед положительного числа $\frac{\varepsilon}{4}$. Обозначим, кроме того, через ω полное колебание функции $f(P)$.

Построим область Δ, содержащую поверхность Σ, ограниченную связной аналитической поверхностью и обладающую следующим свойством: какова бы ни была область Ω, принадлежащая Δ, ограни-

ченная аналитическими поверхностями и объем которой превосходит $\alpha = \frac{2\pi\rho^3}{\omega}\varepsilon$, площадь границы Ω превосходит $K = 16\pi\rho^2\left(1 + 3\frac{\omega}{\varepsilon}\right)$ Существование такой области Δ есть следствие только что доказанной леммы. В самом деле, если такой области не существует, мы могли бы построить последовательность сходящихся к Σ областей Ω_m, объемы которых превосходят α, а площади границ которых остаются меньше K, что противоречит лемме.

Так как области Δ_n сходятся к Σ, начиная с некоторого n, все области Δ_n содержатся в Δ. Мы докажем, что если область Δ_n принадлежит Δ, то во всякой точке P множества E имеет место неравенство

$$f(P) - \varepsilon < V_n(P) < f(P) + \varepsilon. \tag{12}$$

Так как число ε произвольно мало, из (12) следует равномерная сходимость функций $V_n(P)$ к $f(P)$ на множестве E.

В самом деле, пусть P точка множества E. Обозначим через σ_r сферу радиуса r с центром в точке P. Пусть δ_n наибольшая связная часть области Δ_n, содержащая точку P и принадлежащая $\sigma_{3\rho}$. Обозначим через C_n границу области δ_n.

В сфере $\sigma_{3\rho}$ мы определим непрерывную функцию $\varphi(P)$ следующим образом:

1° В сфере $\sigma_{2\rho}$ имеем

$$\varphi(M) = f(P) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

2° Вне сферы $\sigma_{2\rho}$ имеем

$$\varphi(M) = f(P) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{r - 2\rho}{\rho}\left(\omega - \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

где r — расстояние от точки P до переменной точки M. Заметим, что

$$\vartheta(\varphi, \sigma_{3\rho}) = \iiint_{\sigma_{3\rho}} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\,dy\,dz =$$

$$= 2\pi\rho\left(\omega - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2.$$

Пусть теперь W_n гармоническая функция, значения которой на границе δ_n совпадают со значениями φ. В области δ_n имеем неравенство

$$V_n \leqslant W_n.$$

В самом деле, на части C_n, содержащейся внутри $\sigma_{3\rho}$,

$$V_n = f \leqslant f(P) + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant W_n,$$

так как в сфере $\sigma_{3\rho}$ колебание f не превосходит $\frac{\varepsilon}{4}$; на части границы C_n, лежащей на поверхности сферы $\sigma_{3\rho}$,

$$V_n \leqslant f(P) + \omega = W_n,$$

так как граничные значения V_n в δ_n не превосходят $f(P)+\omega$. На основании принципа максимума всюду в δ_n имеем $V_n \leqslant W_n$.

Мы докажем теперь неравенство

$$W_n(P) \leqslant f(P) + \varepsilon,$$

из которого, очевидно, следует правая часть неравенства (12).

Обозначим через $\delta_n(a)$ множество точек области δ_n, которые принадлежат сфере $\sigma_{2\rho}$ и в которых удовлетворяется неравенство $W_n \geqslant a$, и пусть $\Gamma_n(a)$ часть поверхности уровня $W_n = a$, содержащаяся в $\sigma_{2\rho}$. Если удовлетворяется неравенство

$$a > f(P) + \frac{\varepsilon}{4},$$

то граница множества $\delta_n(a)$ состоит из $\Gamma_n(a)$ и части поверхности сферы $\sigma_{2\rho}$, так как на части границы δ_n, принадлежащей сфере $\sigma_{2\rho}$, имеем

$$W_n = f(P) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Мы докажем прежде всего, что объем множества $\delta_n\left(f(P) + \frac{\varepsilon}{4}\right)$ не превосходит $\frac{2\pi\rho^3}{\omega}\varepsilon$. В самом деле, в противном случае, обозначая через ν нормаль к поверхности уровня в точке области δ_n, имеем *

$$\vartheta(W_n, \delta_n) = \iiint\limits_{\delta_n} \left(\frac{\partial W_n}{\partial \nu}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

и в силу неравенства Шварца

$$\vartheta(W_n, \delta_n) \geqslant \frac{\left(\iiint\limits_{\delta_n} \left|\frac{\partial W_n}{\partial \nu}\right| dx\,dy\,dz\right)^2}{\text{объем }(\delta_n)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\text{объем }(\delta_n)} \left[\int\limits_{a=f(P)+\frac{\varepsilon}{4}}^{a=f(P)+\frac{\varepsilon}{2}} \text{площадь } \Gamma_n(a) \cdot \frac{\partial W_n}{\partial \nu}\, d\nu\right]^2, \qquad (13)$$

так как $\frac{\partial W_n}{\partial \nu} d\nu$ постоянно, если $d\nu$ расстояние по нормали между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня; нижний предел интеграла мы взяли, имея в виду, что в области

$$W_n \geqslant f(P) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Если объем области $\delta_n\left(f(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ превосходит $\frac{2\pi\rho^3}{\omega}\varepsilon$, то при

* Как и выше, $\vartheta(W, \delta)$ обозначает интеграл Дирихле функции W в области δ.

$a < f(P) + \frac{\varepsilon}{2}$ объем $\delta_n(a)$ также больше $\frac{2\pi\rho^3}{\omega}\varepsilon$, так как $\delta_n\left(f(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ в этом случае содержится в $\delta_n(a)$.

Имея в виду, что $\delta_n(a)$ всегда содержится в Δ, заключаем из свойств Δ, что площадь границы $\delta_n(a)$ превышает K. Эта граница состоит из $\Gamma_n(a)$ и части поверхности сферы $\sigma_{2\rho}$, площадь которой, очевидно, не превосходит $16\pi\rho^2$; поэтому

$$\text{площадь } (\Gamma_n(a)) \geqslant K - 16\pi\rho^2 = 48\pi\rho^2 \frac{\omega}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Область δ_n содержится в $\sigma_{3\rho}$; следовательно,

$$\text{объем } (\delta_n) < 36\pi\rho^3. \tag{15}$$

На основании (13), (14) и (15) заключаем:

$$\vartheta(W_n, \delta_n) > 4\pi\rho\omega^2.$$

С другой стороны, на основании принципа Дирихле

$$\vartheta(W_n, \delta_n) < \vartheta(\varphi, \delta_n) \leqslant \vartheta(\varphi, \sigma_{3\rho}) < 4\pi\rho\omega^2.$$

Таким образом, мы получили противоречие и, следовательно,

$$\text{объем } \delta_n\left(f(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{2\pi\rho^3}{\omega}\varepsilon. \tag{16}$$

Из неравенства (16) вытекает, что можно найти сферу σ_r, $\rho \leqslant r \leqslant 2\rho$, такую, что поверхностная мера множества $E_r^{(n)}$ точек поверхности сферы σ_r, принадлежащих к $\delta_n\left(f(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, не превышает $\frac{2\pi\rho^2}{\omega}\varepsilon$. В самом деле, в противном случае

$$\text{объем } \delta_n\left(f(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant \int_\rho^{2\rho} \text{mes } E_r^{(n)}\, dr > \frac{2\pi\rho^3}{\omega}\varepsilon.$$

Пусть W_n' гармоническая функция, определенная в сфере σ_r, граничные значения которой на $E_r^{(n)}$ равны $f(P) + \omega$, а в точках поверхности σ_r, лежащих вне $E_r^{(n)}$, равны $f(P) + \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через δ_n' наибольшую связную часть δ_n, содержащую точку P и содержащуюся в σ_r. На множестве $E_r^{(n)}$ имеем

$$W_n \leqslant f(P) + \omega = W_n',$$

остальные части границы δ_n' совпадают с частями границы δ_n, лежащими внутри σ_r, и, следовательно, внутри $\sigma_{2\rho}$; поэтому в этих граничных точках

$$W_n = f(P) + \frac{\varepsilon}{2} = W_n'.$$

На основании принципа максимума в δ_n' имеем $W_n \leqslant W_n'$. Применяя теорему о среднем значении к функции W_n' в сфере σ_r, получаем

$$W'_n(P) \leqslant f(P) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\operatorname{mes} E_r^{(n)}}{4\pi r^2}\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2}\right) < f(P) + \varepsilon.$$

Вспоминая, что $W'_n(P) > W_n(P) \geqslant V_n(P)$, имеем

$$V_n(P) \leqslant f(P) + \varepsilon.$$

Совершенно аналогично доказывается левая часть неравенства (12).

§ 4. Некоторые редукции вопроса об устойчивости в граничной точке

При обозначениях, принятых в § 1, пусть на поверхности S нам даны две точки P_1 и P_2 и пусть кусочнонепрерывная функция $\varphi(P)$ равна нулю в ρ_1-окрестности* точки P_1, равна ν $(\nu > 0)$ в ρ_2-окрестности точки P_2 и ограничена снизу фиксированным числом $-k$ $(k > 0)$.

$$\varphi(P) = 0, \qquad \overline{PP_1} < \rho_1$$
$$\varphi(P) = \nu, \qquad \overline{PP_2} < \rho_2$$
$$\varphi(P) > -k \quad \text{всюду.}$$

При этих условиях существует функция $\varepsilon(\nu)$, $\varepsilon(\nu) > 0$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varepsilon(\nu) = 0$ такая, что при всех n достаточно больших будем иметь при $\overline{PP_1} < \frac{1}{2}\rho_1$

$$\left.\begin{aligned} u_{n,\varphi}(P) &> -\varepsilon(\nu), \\ U_{n,\varphi}(P) &> -\varepsilon(\nu), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $u_{n,\varphi}(P)$ и $U_{n,\varphi}(P)$—функции, определенные в § 1.

Ограничимся доказательством второй части неравенства (17). Обозначим через $s_m^{(1)}$ и $S_n^{(1)}$ части поверхностей s_m, S_n, расположенные в ρ_1-окрестности точки P, и через $s_m^{(2)}$, $S_n^{(2)}$ части, расположенные в ρ_2-окрестности точки P_2. Фиксируем число ε. В силу теоремы 1 (§ 3) существует такое число N_1, что из положительности $U_{n,\varphi}(P)$, $n \geqslant N_1$ на $s_m^{(1)}$, $m \geqslant N_1$, будет следовать неравенство

$$U_{n,\varphi}(P) > -\varepsilon \tag{18}$$

для всех точек $\frac{\rho_1}{2}$-окрестности точки P_1, расположенных в слое, заключенном между поверхностями s_m и S_n. Кроме того, в силу отмеченных выше свойств гармонической меры существует такое число N_2, что при $n > N_2$ гармоническая мера поверхности $S_n^{(1)}$ будет превосходить некоторую положительную константу α

$$G(S_n^{(1)}, D_n, P) > \alpha \tag{19}$$

* ρ-окрестностью множества E мы будем называть совокупность всех точек, расстояния которых до E не превышают ρ.

для любой точки P области d_{N_1}. Отсюда заключаем, что всюду в области d_{N_1} при $n > N_2$ имеем

$$U_{n,\varphi}(P) > \alpha\nu - k(1-\alpha), \tag{20}$$

т. е. при ν достаточно большом функция $U_{n,\varphi}(P)$ будет положительна в замкнутой области d_{N_1}, а следовательно, в силу специального подбора числа N_1, при n большем N_1 и N_2, функция $U_{n,\varphi}(P)$ будет больше $-\varepsilon$ во всех точках $\frac{\rho_1}{2}$-окрестности точки P_1, принадлежащих D_n. Наше утверждение полностью доказано.

Приведенные рассуждения, очевидно, автоматически переносятся на случай конечносвязных областей; в частности, мы получим следующее предложение:

Пусть σ есть поверхность сферы, принадлежащей области D. Обозначим через Δ область, ограниченную S и σ, а через δ_n и Δ_n области, ограниченные σ и, соответственно, поверхностями s_n и S_n. Фиксируем на поверхности S точку M. Пусть $v_n(P)$ $(V_n(P))$ гармоническая функция правильная в области δ_n (Δ_n) и удовлетворяющая следующим условиям:

$$v_n(P) > -k \quad (k>0) \text{ в области } \delta_n,$$
$$V_n(P) > -k \quad (k>0) \text{ в области } \Delta_n,$$
$$v_n(P) = V_n(P) = 0 \text{ в } \rho\text{-окрестности точки } M,$$
$$v_n(P) = V_n(P) = \nu \text{ на поверхности } \sigma.$$

При этих условиях, как бы мало ни было число ε, при ν достаточно большом, во всех точках $\frac{\rho}{2}$-окрестности точки M, принадлежащих δ_n (Δ_n), будем иметь

$$v_n(P) > -\varepsilon, \quad V_n(P) > -\varepsilon.$$

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Построим три специальных последовательности гармонических функций*

$$U_1'(P),\quad U_2'(P),\ldots,\quad U_n'(P),\ldots$$
$$U_1''(P),\quad U_2''(P),\ldots,\quad U_n''(P),\ldots$$
$$V_1(P),\quad V_2(P),\ldots,\quad V_n(P),\ldots$$

Функции U_n' и U_n'' правильны в области D_n, функция V_n в области Δ_n, причем $U_n'(P)$ совпадает с функцией $U_{n,\varphi}(P)$, где $\varphi(P)$ заключена между нулем и единицей, равна нулю в некоторой окрестности точки M_1 поверхности S и равна единице в некоторой окрестности другой точки M_2 той же поверхности; функция $U_n''(P) = U_{n,\varphi}(P)$, при $\varphi(P) = \frac{1}{r}$, где r есть расстояние от некоторой фиксированной точки P_0 области D до точки P; функция $V_n(P)$ равна нулю на S_n и равна 1 на σ. При этих обозначениях каждое из трех следующих условий

$$\lim_{n\to\infty} U'_n(M_1) = 0\,, \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} U''_n\ (M_1) = \frac{1}{P_0M}\,, \tag{22}$$

$$\lim_{n\to\infty} V_n\ (M_1) = 0 \tag{23}$$

есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка M_1 была точкой устойчивости. Кроме того, каждое из этих условий есть условие, достаточное для того, чтобы M_1 была правильной точкой.

Необходимость условий (21) и (22) есть следствие определения устойчивости. Докажем необходимость условия (23). Для этой цели допустим, что

$$\lim_{n\to\infty}\ V_n\,(M_1) = \alpha > 0$$

и построим непрерывную неотрицательную функцию $\varphi(P)$, равную нулю в ρ-окрестности точки M_1 и равную ν, $\nu > 0$, в ρ-окрестности некоторой точки M_2 поверхности S. Число ρ мы выберем при этом настолько малым, чтобы ρ-окрестности точек M_1 и M_2 не пересекались, а число ν выберем настолько большим, чтобы при всех достаточно больших n на поверхности σ имело место неравенство

$$U_{n,\varphi}\ (P) > 1. \tag{24}$$

Такое ν существует в силу отмеченных выше свойств гармонической меры. Из неотрицательности φ и неравенства (24) следует, что всюду в области Δ_n будем иметь

$$U_{n,\varphi}\,(P) > V_n\,(P).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\ U_{n,\varphi}(M_1) > \alpha > 0;$$

замечая, что $\varphi(M_1) = 0$; отсюда заключаем, что M_1 не есть точка устойчивости.

Переходя к доказательству достаточности условий, ограничимся рассмотрением условий (22) и (23), ибо доказательства достаточности (21) и (23) вполне подобны.

Начнем с доказательства достаточности условия (23). Нам нужно доказать, что при соблюдении условия (23), какова бы ни была функция $\varphi(P)$, определенная и непрерывная в окрестности поверхности S, всегда имеем

$$\lim_{n\to\infty} U_{n,\varphi}(M_1) = \varphi\,(M_1)\,,\ \lim_{P\to M_1} U_\varphi\,(P) = \varphi\ (M_1),$$

а также

$$\lim_{P\to M_1} u_\varphi\,(P) = \varphi\,(M_1).$$

Для этой цели фиксируем функцию $\varphi(P)$ и произвольное положительное число ε. Определим теперь число ρ настолько малым,

чтобы в 4ρ-окрестности точки M_1 колебание функции $\varphi(P)$ не превосходило число $\frac{\varepsilon}{2}$. Построим вспомогательную функцию $\psi(P)$, обладающую следующими свойствами: 1) $\psi(P)$ определена и непрерывна в окрестности поверхности S, 2) $\psi(P) = \varphi(M_1)$ во всех точках 2ρ-окрестности точки M_1, 3) колебание $\psi(P)$ в 4ρ-окрестности точки M_1 не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$, 4) $\psi(P) \equiv \varphi(P)$ вне 4ρ-окрестности точки M_1. В силу принципа максимума, очевидно, имеем

$$|U_{n,\varphi}(P) - U_{n,\psi}(P)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |u_{n,\varphi}(P) - u_{n,\psi}(P)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (25)$$

Кроме того, в силу рассмотрений, сделанных в начале этого параграфа, существует положительная константа ν такая, что при всех достаточно больших значениях n во всех точках Δ_n, принадлежащих ρ-окрестности точки M_1, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} U_{n,\psi}(P) + \nu V_n(P) > \varphi(M_1) - \frac{\varepsilon}{8}, \\ U_{n,\psi}(P) - \nu V_n(P) < \varphi(M_1) + \frac{\varepsilon}{8}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Аналогично, обозначая через $v_n(P)$ гармоническую функцию, правильную в области δ_n и принимающую на s_n значение нуль, а на σ значение единица, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} u_{n,\psi}(P) + \nu v_n(P) > \varphi(M_1) - \frac{\varepsilon}{8}, \\ u_{n,\psi}(P) - \nu v_n(P) < \varphi(M_1) + \frac{\varepsilon}{8} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

для всех точек области δ_n, принадлежащих ρ-окрестности точки M_1. Из неравенств (26) и (27) получаем

$$|U_{n,\psi}(P) - \varphi(M_1)| < 2\nu V_n(P) + \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|u_{n,\psi}(P) - \varphi(M_1)| < 2\nu v_n(P) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

С другой стороны, в силу условия (23) и непрерывности функции $V_n(P)$ найдутся такие числа N и η, $0 < \eta < \rho$, что во всех точках замкнутой области $\overline{D}$, принадлежащих η-окрестности точки M_1, будем иметь

$$0 < V_N(P) < \frac{\varepsilon}{8\nu};$$

но так как в силу принципа максимума при $n > N$

$$V_n(P) < V_N(P)$$

и при всех n

$$v_n(P) < V_N(P),$$

то, следовательно, во всех точках замкнутой области $\overline{D}$, принадлежащих η-окрестности точки M_1, при $n \geqslant N$ будем иметь

$$|U_{n,\varphi}(P)-\varphi(M_1)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (28)$$

а для всех точек области δ_n, принадлежащих той же окрестности,

$$|u_{n,\varphi}(P)-\varphi(M_1)|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (29)$$

Сопоставляя неравенства (25), (28) и (29) при $n>N$, окончательно получаем

$$|U_{n,\varphi}(P)-\varphi(M_1)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |u_{n,\varphi}(P)-\varphi(M_1)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

что полностью доказывает высказанное утверждение.

Из доказанной достаточности условия (23) нетрудно показать достаточность условия (22). В самом деле, рассмотрим функцию Грина для области D_n:

$$V'_n(P)=U''_n(P)-\frac{1}{r},$$

где r есть расстояние от точки P_0 до точки P. Построенная функция $V'_n(P)$ отрицательна в области D_n и равна нулю на поверхности S_n. Обозначим через $-\mu$ ($\mu>0$) ее максимальное значение на сфере σ. В силу принципа максимума будем иметь

$$0>-\mu V_n(M_1)>V'_n(M_1),$$

но так как по условию

$$\lim_{n\to\infty} V'_n(M_1)=0,$$

то, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} V_n(M_1)=0,$$

т. е. из условия (22) следует условие (23).

Рассуждения, вполне подобные приведенным при доказательстве леммы 2, позволяют установить следующий критерий правильности точки поверхности S: для того чтобы точка P поверхности S была правильной точкой, необходимо и достаточно существование гармонической функции $U(M)$, правильной в D и такой, что 1) $\lim\limits_{M\to P} U(M)=1$, 2) $U(M)<1$ в области D.

ГЛАВА II. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 5. Связи между различными понятиями устойчивости и разрешимости проблемы Дирихле

Начнем с выяснения связи между вопросами разрешимости и устойчивости проблемы Дирихле. В силу леммы 2 мы имеем здесь прежде всего следующее предложение:

ТЕОРЕМА 2. *Если точка M поверхности S есть точка устойчивости, то эта точка M есть правильная точка* (относительно проблемы Дирихле).

Установим теперь связь между устойчивостью внутри области, в замкнутой области и разрешимостью проблемы Дирихле.

ТЕОРЕМА 3. *Если проблема Дирихле всегда разрешима в области D и если проблема Дирихле устойчива внутри D, то она устойчива в замкнутой области $\overline{D}$.*

В самом деле, пусть $\varphi(P)$ произвольная функция, определенная и непрерывная в некоторой окрестности поверхности S. В силу условий теоремы и определений, принятых в § 1, функция $u_\varphi(P)$ равномерно непрерывна в области D и принимает на поверхности S значения $\varphi(P)$; кроме того, внутри области D имеем

$$\lim_{n\to\infty} U_{n,\varphi}(P) = u_\varphi(P), \tag{30}$$

причем сходимость равномерная внутри области D.

Заметив это, фиксируем произвольное положительное число ε и определим число m так, чтобы из неравенства

$$|U_{n,\varphi}(P) - u_\varphi(P)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

при $n > m$ на поверхности s_m, следовало неравенство

$$|U_{n,\varphi}(P) - \varphi(P)| < \varepsilon,$$

при $n > m$ на поверхности S. Существование такого числа m следует из теоремы 1. Фиксировав m, в силу равномерной сходимости последовательности $U_{1,\varphi}$, $U_{2,\varphi}, \ldots; U_{n,\varphi}, \ldots$ внутри D, мы можем определить такое число N, $N > m$, что при $n > N$ на поверхности s_m будем иметь

$$|U_{n,\varphi}(P) - u_\varphi(P)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

но в таком случае в силу выбора числа m и принципа максимума при $n > N$ в замкнутой области $\overline{D}$ будем иметь

$$|U_{n,\varphi} - u_\varphi(P)| < \varepsilon.$$

Теорема полностью доказана.

Совершенно аналогично на основании теоремы 1 можно построить доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3'. *Если проблема Дирихле устойчива внутри области D, то каждая правильная точка границы S области D есть точка устойчивости для проблемы Дирихле.*

При выводе критериев устойчивости в области оказывается весьма существенным редуцировать общую задачу устойчивости к устойчивости проблемы Дирихле в отдельных точках. Мы имеем здесь следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы проблема Дирихле была устойчива внутри области D, необходимо и достаточно, чтобы множество точек неустойчивости поверхности S было множеством гармонической меры нуль.*

Докажем сначала достаточность условия. Фиксируем произвольную функцию $\varphi(P)$, определенную и непрерывную в окрестности поверхности S. Обозначим через E совокупность точек устойчивости поверхности S; в силу условия теоремы имеем

$$G(E,\ D,\ P_0) = 1; \tag{31}$$

кроме того, в каждой точке M множества E имеем

$$\lim_{n \to \infty} U_{n,\varphi}(M) = \lim_{P \to M} U_\varphi(P) = \lim_{P \to M} u_\varphi(P) = \varphi(M).$$

Заметив это, обозначим через K_1 верхнюю границу значений разности $U_\varphi(P) - u_\varphi(P)$ и рассмотрим функцию

$$V_1(P) = K_1 - U_\varphi(P) + u_\varphi(P).$$

Гармоническая функция $V_1(P)$ неотрицательна в области D, причем все ее предельные значения на множестве E равны K_1; следовательно, в силу (31) имеем

$$V_1(P) \geqslant K_1 G(E,\ D,\ P) = K_1,$$

т. е. в области D

$$U_\varphi(P) - u_\varphi(P) \leqslant 0.$$

Вполне аналогично, обозначая через K_2 верхнюю границу разности $u_\varphi(P) - U_\varphi(P)$ и рассматривая функцию

$$V_2(P) = K_2 - u_\varphi(P) - U_\varphi(P),$$

мы докажем, что в области D

$$U_\varphi(P) - u_\varphi(P) \geqslant 0.$$

Таким образом

$$U_\varphi(P) = u_\varphi(P),$$

т. е. проблема Дирихле устойчива внутри области D.

Докажем теперь необходимость условия. Для этой цели допустим, что множество E точек неустойчивости поверхности S имеет положительную гармоническую меру

$$G(E,\ D,\ P) > 0,$$

и докажем, что в этом случае проблема Дирихле не будет устойчива внутри D. В самом деле, обозначим через $V_n(P)$ и $v_n(P)$ гармонические функции, правильные соответственно в областях Δ_n и δ_n* и принимающие на поверхностях S_n, s_n значения 0, а на сфере σ значения $u_\varphi(P) + \frac{1}{\rho}$, где ρ есть радиус сферы σ, а $\varphi(P) = \frac{1}{PP_0}$. Последовательность функций

$$V_1(P),\ V_2(P),\ \ldots,\ V_n(P),\ \ldots \tag{32}$$

---

* где Δ_n согласно обозначениям, принятым в § 3, есть область, ограниченная поверхностью S_n и поверхностью сферы σ с центром в точке P_0, принадлежащей D; δ_n есть область, ограниченная s_n и σ.

монотонно убывает в D, а последовательность

$$v_1(P),\ v_2(P),\ \ldots,\ v_n(P),\ \ldots \tag{33}$$

монотонно возрастает, причем в силу леммы 2 в каждой точке M множества E имеем

$$\lim_{n\to\infty} V_n(M) > 0.$$

Отсюда заключаем, что существуют два положительных числа ε и η такие, что на некотором множестве E', $E' \subset E$,

$$G(E',\ \Delta,\ P_1) > \eta,$$

будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} V_n(M) > \varepsilon,$$

где Δ есть область, ограниченная S и σ, а P_1 — фиксированная точка области Δ.

Обозначим теперь, соответственно, через E_n и $e_{n,m}$ множества точек поверхностей S и s_m, в которых

$$V_n(M) > \varepsilon.$$

Множества E_n и $e_{n,m}$ суть открытые множества; следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} G(e_{n,m},\ \delta_m,\ P_1) \geqslant G(E_n,\ \Delta,\ P_1).$$

Кроме того, так как последовательность (32) монотонно убывает, то множество E_n содержит множество E', и следовательно, при любом n имеем

$$G(E_n,\ \Delta,\ P_1) > \eta.$$

Отсюда заключаем, что, каково бы ни было число n, при m достаточно большом, совокупность точек поверхности s_m, в которых

$$V_n(P) = V_n(P) - v_m(P) > \varepsilon,$$

будет иметь относительно точки P_1 гармоническую меру большую η, но в таком случае, так как всюду $V_n(P) > v_m(P)$, будем иметь

$$V_n(P_1) - v_m(P_1) > \varepsilon\eta.$$

Следовательно, обозначая соответственно через $V(P)$ и $v(P)$ пределы последовательностей (32) и (33), всюду в области Δ будем иметь

$$V(P) > v(P). \tag{34}$$

Полагая, как и раньше, $\varphi(P) = \frac{1}{PP_0}$, докажем, что функции $u_\varphi(P)$ и $U_\varphi(P)$ не совпадают внутри D. Допустим от противного, что

$$u_\varphi(P) \equiv U_\varphi(P),$$

но в таком случае, полагая $PP_0 = r$, получим

$$V(P) = U_\varphi(P) + \frac{1}{r};$$

кроме того, по построению

$$v(P) = u_\varphi(P) + \frac{1}{r};$$

следовательно, всюду в области Δ имеем

$$V(P) = v(P),$$

что противоречит (34). Теорема полностью доказана *

Сопоставляя теоремы 2, 3, 4, мы получим как следствие теорему, дающую возможность судить об устойчивости в замкнутой области по устойчивости в граничных точках:

ТЕОРЕМА 5. *Если каждая точка поверхности S есть точка устойчивости, то проблема Дирихле устойчива в замкнутой области.*

ГЛАВА III. ПРИМЕР НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

§ 6. Формулировка результатов

В предыдущих параграфах были даны определения устойчивости задачи Дирихле и было показано, каким образом различные определения связаны между собой. Для того чтобы оправдать эти определения, мы покажем теперь, что неустойчивость задачи Дирихле в самом деле может иметь место. Очевидно, что всякая иррегулярная точка границы области является точкой неустойчивости. Уже отсюда следует, что если задача Дирихле не всегда разрешима в области D, то она неустойчива в этой области. Однако существуют области D, в которых задача Дирихле разрешима при любых непрерывных данных и в то же время неустойчива. Мы докажем следующее предложение:

Существует односвязная область D, ограниченная простой замкнутой поверхностью Жордана S, имеющей конечную площадь, и обладающая следующими свойствами:

1° *Проблема Дирихле разрешима в области D при любых непрерывных данных на S.*

2° *Проблема Дирихле неустойчива внутри области D.*

3° *Множество точек неустойчивости границы D имеет поверхностную меру нуль.*

§ 7. Вспомогательные предложения из теории потенциала

При построении области D, обладающей указанными свойствами, мы будем опираться на три вспомогательных предложения

* Не существенно меняя доказательство необходимости условия, можно также получить следующий результат: для того чтобы проблема Дирихле была устойчива внутри области D, достаточно, чтобы она была устойчива в одной точке области D.

из теории гармонических функций, на доказательстве которых мы остановимся прежде всего.

ЛЕММА 3. *Пусть* Σ *система конечного числа кусков аналитических поверхностей,* V *потенциал простого слоя с непрерывной плотностью, распределенной на* Σ.

Каковы бы ни были положительные числа ε *и* η, *можно построить непрерывную во всем пространстве функцию* W, *обладающую следующими свойствами:*

1° W *есть потенциал простого слоя с непрерывной плотностью, расположенной на конечном числе сфер* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, *центры которых лежат на* Σ.

2° *Сумма площадей поверхностей сфер* σ_k *не превосходит* η.

3° *На каждой сфере* σ_k *функция* W *принимает постоянное значение, равное значению* V *в центре* σ_k.

4° *Во всем пространстве имеет место неравенство*

$$|V - W| < \varepsilon.$$

В самом деле, заданная функция V может быть представлена в виде

$$V(P) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\rho\, ds}{R},$$

где R—расстояние от точки P до точки M поверхности Σ, ρ—плотность слоя на Σ и ds—элемент поверхности Σ.

Обозначим через P какую-нибудь точку Σ; пусть $\Sigma(P)$ некоторый односвязный кусок Σ, содержащий точку P. Мы назовем внутренним радиусом r' куска $\Sigma(P)$ (относительно точки P) верхнюю грань радиуса сферы с центром в точке P, не содержащей точек Σ, не лежащих внутри $\Sigma(P)$. Внешним радиусом участка $\Sigma(P)$ относительно P мы будем называть нижнюю грань радиусов сфер с центром в P, содержащих $\Sigma(P)$. Очевидно, $r' < r''$.

Имея в виду, что Σ состоит из конечного числа кусков аналитических поверхностей, легко убедиться, что существует число A такое, что, каково бы ни было число δ, область Σ может быть разбита на конечное число кусков $\Sigma(P_k)$ с внутренними и внешними радиусами r'_k и r''_k и площадями s_k, удовлетворяющими следующим условиям:

$$r''_k < \delta, \; r''_k < A r'_k, \; s_k < A r'^2_k. \qquad \text{(a)}$$

Перейдем теперь к построению сфер $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Обозначим через μ максимум $|\rho(M)|$ и через s площадь Σ. Пусть d число, обладающее следующим свойством: какова бы ни была сфера радиуса $4d$ с центром P, интеграл

$$\iint \frac{ds}{\overline{MP}},$$

распространенный на часть Σ, содержащуюся в этой сфере, не превосходит $\frac{\varepsilon}{12\mu(A+2)}$. Легко показать, что такое число существует, в силу аналитического характера Σ.

Пусть теперь δ число, удовлетворяющее неравенствам

$$\delta < d, \ \delta < \frac{\varepsilon d^2}{48\mu s}, \ \delta < \frac{\varepsilon}{24\mu A}\sqrt{\frac{\eta}{s}} \qquad \text{(b)}$$

и такое, что при $\overline{M_1M_2} < 2\delta$

$$\left.\begin{aligned} |V(M_1) - V(M_2)| &< \frac{\varepsilon}{4}, \\ |\rho(M_1) - \rho(M_2)| &< \frac{\varepsilon d}{24s}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Разобьем поверхность Σ на части $\Sigma(P_k)$, удовлетворяющие условиям (a). Через σ_k мы обозначим сферу с центром в точке P_k и радиуса $\rho_k = \frac{1}{2} r'_k \sqrt{\frac{\eta}{s}}$. Из неравенства $\rho_k < \frac{r'_k}{2}$ и из определения чисел r'_k следует, что сферы σ_k не имеют общих точек. Построенные сферы удовлетворяют условию 2° леммы. В самом деле,

$$\sum \text{пл}(\sigma_k) = \sum 4\pi\rho_k^2 < \sum \pi r'^2_k \cdot \frac{\eta}{s} \leqslant \eta,$$

так как площадь $\Sigma(P_k)$ превосходит $\pi r'^2_k$.

Функцию W мы определим теперь следующим образом: 1) $W = V(P_k)$ внутри и на границе сферы σ_k; 2) вне сфер σ_k функция W есть решение задачи Дирихле, исчезающее на бесконечности и принимающее на поверхностях σ_k постоянные значения $V(P_k)$.

Очевидно, что построенная функция удовлетворяет условиям 1° и 3° леммы. Остается доказать, что удовлетворяется условие 4°.

Условие 4°, очевидно, выполняется внутри каждой из сфер σ_k, так как $\rho_k < r'_k < \delta$, а при $P_kM < \delta$

$$|V(M) - V(P_k)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Докажем, что условие 4° выполняется вне сфер σ_k. Для этого мы рассмотрим вспомогательную функцию

$$U(P) = \sum_{(k)} \frac{s_k \rho(P_k)}{PP_k},$$

гармоническую вне сфер σ_k. Мы покажем прежде всего, что

$$|U - V| < \frac{\varepsilon}{4}$$

вне сфер σ_k. Функция $U - V$ гармонична в области D_1, лежащей вне сфер σ_k и Σ, и исчезает на бесконечности. Поэтому достаточно доказать, что предыдущее неравенство выполняется на границе этой области. Рассматриваемая разность может быть записана в виде

$$U - V = \sum_{(k)} \left[\frac{s_k \rho(P_k)}{PP_k} - \int_{(\Sigma P_k)} \frac{\rho(M)\, ds}{PM} \right].$$

Точка границы D_1 принадлежит к одной из частей этой границы, состоящей из участка $\Sigma(P_k)$, лежащего вне σ_k, и поверхности σ_k. Пусть j индекс этой части. Имеем в силу (a), (b) и определения ρ_k

$$\frac{s_j \rho(P_j)}{\overline{PP_j}} < \frac{A r_j'^2}{\rho_j} \mu < A\mu \sqrt{\frac{s}{\eta}}\, \delta < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Рассмотрим теперь члены суммы такие, что хотя бы одна точка $\Sigma(P_k)$ попадает в сферу радиуса d с центром в точке P. Вследствие того, что $r_k'' < \delta < d$, для этих слагаемых $\Sigma(P_k)$ содержится в сфере радиуса $3d$ с центром в точке P.

Если $k \neq j$, то, обозначив через M произвольную точку $\Sigma(P_k)$, можем написать

$$\frac{1}{\overline{PP_k}} = \frac{1}{\overline{PM}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\overline{PP_k}} < \frac{1}{\overline{PM}} \frac{\overline{PP_k} + r_k''}{\overline{PP_k}}.$$

и так как при $k \neq j$ имеем $\overline{PP_k} > r_k'$, $r_k'' < A r_k'$, получаем

$$\frac{1}{\overline{PP_k}} < (1 + A)\frac{1}{\overline{PM}},$$

откуда

$$\frac{s_k \rho(P_k)}{\overline{PP_k}} < (1 + A)\,\mu \iint\limits_{\Sigma(P_k)} \frac{ds}{\overline{PM}}.$$

Имея в виду оценку для $\frac{s_j \rho(P_j)}{PP_j}$ и полученное неравенство, можем для суммы всех рассматриваемых слагаемых написать

$$\left|\sum{}'\right| \leqslant \sum_{(k)}{}' \left[\left|\frac{s_k \rho(P_k)}{\overline{PP_k}}\right| + \left|\int\limits_{\Sigma(P_k)} \frac{\rho\, ds}{\overline{PM}}\right|\right] < \frac{\varepsilon}{12} + (2 + A)\,\mu \iint \frac{ds}{PM},$$

где интеграл, стоящий справа, распространяется на часть Σ, лежащую внутри сферы радиуса $4d$ с центром в точке P; но тогда по самому определению числа d получаем

$$\left|\sum{}'\right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Остается еще оценить сумму Σ'' слагаемых, обладающих следующим свойством: $\Sigma(P_k)$ лежит целиком вне сферы радиуса d с центром в точке P. Имеем

$$\left|\sum{}''\right| \leqslant \sum_{(k)}{}'' \left|\frac{\rho(P_k)\, s_k}{\overline{PP_k}} - \iint\limits_{\Sigma(P_k)} \frac{\rho(M)\, ds}{\overline{PM}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(k)}{}'' \left[\iint\limits_{\Sigma(P_k)} \frac{|\rho(M) - \rho(P_k)|\, ds}{\overline{PM}} + |\rho(P_k)| \cdot \iint\limits_{\Sigma(P_k)} \frac{\overline{PM} - \overline{PP_k}}{\overline{PM} \cdot \overline{PP_k}}\, ds\right].$$

Но в области $\Sigma(P_k)$ имеем $\overline{MP_k} < 2\delta$ и, следовательно, в силу (c)

$$|\rho(M) - \rho(P_k)| < \frac{\varepsilon d}{24 s}, \quad |\overline{PM} - \overline{PP_k}| < 2\delta;$$

кроме того, $PP_k > d$, $\overline{PM} > d$ и $|\rho(P_k)| < \mu$, поэтому в силу (b)

$$\left|\sum{}''\right| \leqslant \frac{2\delta\mu}{d^2} + \frac{\varepsilon}{24} < \frac{\varepsilon}{12}$$

и, следовательно,

$$|U(P)-V(P)| \leqslant \left|\sum{}'\right| + \left|\sum{}''\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оценим теперь разность $|U-W|$ в области D_2, лежащей вне сфер σ_k. Функция $U-W$ гармонична в области D_2 и исчезает на бесконечности, поэтому достаточно ее оценить на границе D_2. В точке P границы D_2 имеем $W=V(P_k)$, поэтому

$$|U(P)-W(P)| \leqslant |U(P)-V(P)| + |V(P)-V(P_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, в области D_2 имеем одновременно два неравенства

$$|U-W| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |U-V| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует

$$|V-W| < \varepsilon$$

и, следовательно, условие 4° леммы выполняется. Это полностью доказывает лемму 3.

Отметим следующее специальное предложение, которое нам потребуется непосредственно при конструкции области D.

ЛЕММА 4. *Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ конечное число сфер, лежащих внутри сферы D_0, $V(P)$ непрерывная функция, определенная внутри D_0, гармоническая всюду в D_0 за исключением поверхностей сфер σ_k, обращающаяся в нуль на границе D_0 и равная единице в сферах σ_k.*

Существует система сфер $\sigma_{k,m}$, обладающая следующими свойствами:

1° *Сфера $\sigma_{k,m}$ лежит внутри сферы σ_k.*

2° *Сумма площадей поверхностей сфер $\sigma_{k,m}$ не превосходит η.*

3° *Непрерывная в D_0 функция $U(P)$, гармоническая вне поверхностей сфер $\sigma_{k,m}$, равная нулю на границе D_0 и единице на границах $\sigma_{k,m}$, удовлетворяет неравенству*

$$|U(P)-V(P)| < \varepsilon.$$

Это предложение есть непосредственное следствие леммы 3. Пусть σ_k' сфера концентрическая с σ_k, содержащаяся в σ_k, и $V'(P)$ непрерывная в D_0 функция, гармоническая во всех точках D_0, не лежащих на поверхностях σ_k', обращающаяся в нуль на поверхности D_0 и в единицу на поверхностях σ_k'. Если радиусы сфер σ_k' достаточно близки к радиусам соответствующих сфер σ_k, то имеем *

* В самом деле, если ρ_k' и ρ_k радиусы сфер σ_k' и σ_k, а r_k радиус наибольшей концентрической с σ_k сферы, принадлежащей D_0, то на основании принципа максимума имеем в слое между сферами радиуса ρ_k' и r_k

$$V'(P) > \frac{\rho_k' r_k}{r_k-\rho_k'}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_k}\right),$$

$$|V(P) - V(P')| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (35)$$

Функция $V'(P)$ может быть представлена как сумма потенциала простого слоя V'_1, лежащего на поверхностях $\{\sigma_k\}$, и V'_2, лежащего на поверхности D_0:

$$V'(P) = V'_1(P) + V'_2(P). \qquad (36)$$

На основании леммы 3 мы можем построить сферы $\sigma_{k,m}$ с центрами на поверхности σ'_k, удовлетворяющие условиям 1° и 2°, и потенциал простого слоя V''_1, лежащего на поверхности этих сфер, удовлетворяющий неравенству

$$|V''_1(P) - V'_1(P)| < \frac{\varepsilon}{6} \qquad (37)$$

всюду, и неравенству

$$|V''_1(P) + V''_2(P) - 1| < \frac{\varepsilon}{6}$$

на поверхности $\sigma_{k,m}$. Но тогда функция $U - V''_1 - V'_2$ гармоническая в D_0, всюду, кроме поверхностей $\sigma_{k,m}$, на этих поверхностях и на границе D_0 не превосходит $\frac{\varepsilon}{3}$; следовательно, всюду в D_0 эта функция остается меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$. Это вместе с (35) и (37) дает

$$|U(P) - V'(P)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (38)$$

и из (35) следует выполнение свойства 3°.

ЛЕММА 5. *Пусть L система конечного числа дуг аналитических кривых, F замкнутое множество, не имеющее общих точек с L. Тогда существует окрестность* $\Delta(\varepsilon)$ *системы дуг L, обладающая следующими свойствами:*

1° *Замкнутое множество F и замкнутая область* $\Delta(\varepsilon)$ *не имеют общих точек.*

2° *Какова бы ни была область D, содержащая F, и гармоническая в области D функция U, удовлетворяющая неравенству* $|U| < 1$ *и обращающаяся в нуль на части границы D, лежащей вне области* $\Delta(\varepsilon)$, *на всем множестве F удовлетворяется неравенство* $|U| < \varepsilon$.

где R—расстояние от центра σ'_k до P. В частности, на сфере σ_k получим

$$V'(P) > \frac{\rho'_k}{\rho_k}\left(1 - \frac{\rho_k - \rho'_k}{r_k - \rho'_k}\right)$$

и так как $V'(P) < 1$, то отсюда следует, что на σ_k имеем $V'(P) \to 1$, но тогда всюду в D_0

$$V'(P) \to V(P).$$

В самом деле, пусть $0 < \varepsilon < 1$. Обозначим через l сумму длин дуг системы L, а через ρ расстояние между множеством F и системой линий L. Рассмотрим функцию

$$W(P) = \frac{\varepsilon\rho}{l} \int\limits_L \frac{dl}{R},$$

где R—расстояние от некоторой точки P до точки M системы линий L. Пусть $\Delta(\varepsilon)$ множество точек, в которых $W(P) > 1$. $\Delta(\varepsilon)$ содержит систему линий L. На множестве F, очевидно, имеем $W < \varepsilon$ и, следовательно, F и $\overline{\Delta(\varepsilon)}$ не имеют общих точек. Пусть D произвольная область, содержащая F, а U функция, определенная в D и удовлетворяющая требованиям, поставленным в 2°. В точках границы D, лежащих вне $\Delta(\varepsilon)$, имеем

$$U = 0 < W,$$

а в точках границы D, принадлежащих $\Delta(\varepsilon)$,

$$U < 1 < W.$$

На основании принципа максимума, всюду в D имеет место неравенство $U < W$, а следовательно, на множестве F имеем $U < \varepsilon$. Аналогично покажем, что на этом множестве $U > -\varepsilon$.

§ 8. Конструкция области с неустойчивой задачей Дирихле

Теперь мы можем перейти к построению области, удовлетворяющей условиям предложения, сформулированного в начале этой главы.

Пусть D_0 сфера радиуса 1 с центром в начале координат и ε произвольная положительная величина.

Построим системы конечного числа сфер $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, определяемые следующим образом: система σ_{k_1} состоит из одной сферы радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в начале координат. Остальные системы сфер должны удовлетворять следующим условиям:

a) Сфера $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ содержится в $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}$.

b) Сумма площадей поверхностей всех сфер $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ не превосходит 2^{-n}.

c) Пусть U_n непрерывная в D_0 функция, гармоническая всюду, кроме точек поверхностей сфер $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, обращающаяся в нуль на границе D_0 и равная единице на поверхности каждой из сфер $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Тогда имеет место следующее неравенство

$$|U_n - U_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (n > 1).$$

Построение систем сфер, удовлетворяющих всем поставленным условиям, возможно в силу леммы 4. При этом мы можем считать, что ни одна из сфер $\sigma_{k_1 k_2}$ не содержит начала координат.

Пусть П совершенное множество точек, принадлежащих системе сфер $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ при любом значении n.

В силу b) множество П имеет поверхностную меру, равную нулю.

В силу a) и c) последовательность функций U_n сходится к функции U, непрерывной в D_0 и гармонической в области $D^{(0)}$, получаемой удалением из D_0 точек множества П. На множестве П функция U принимает значения, равные единице. Имея в виду, что $U_1(0) = 1$, получаем

$$U(0) > 1 - \varepsilon.$$

Определим теперь систему аналитических дуг $l_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ следующим образом: дуги $l_{k_1 k_2}$ соединяют некоторую точку P_0 границы D_0 с точками $P_{k_1 k_2}$, лежащими на поверхностях $\sigma_{k_1 k_2}$. При этом дуги $l_{k_1 k_2}$ не пересекаются нигде, кроме точки P_0, и ни одна из них не проходит через начало координат. Дуги $l_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1} i}$ соединяют точку $P_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}$ поверхности сферы $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}$ с точками $P_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1} i}$, лежащими на сферах $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1} i}$. При этом дуги $l_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1} i}$ остаются внутри области $\bar{\sigma}_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}$, получаемой удалением из сферы $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}$ всех сфер $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1} i}$, и не имеют точек пересечения, отличных от $P_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}$.

Пусть $\Delta_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ множество точек, отстоящих от $l_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ на расстоянии, не превышающем δ_n, и принадлежащих области $\bar{\sigma}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Число δ_n может быть выбрано настолько малым, чтобы выполнялись условия:

d) Множество

$$g_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}} = \sum_{(i)} \Delta_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1} i}$$

не содержит контуров, не стягиваемых внутри него в точку.

e) Площадь поверхности множества

$$\Delta^{(n)} = \sum_{(k_1 \ldots k_n)} \Delta_{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

не превосходит $\frac{1}{2^n}$.

f) Какова бы ни была область Ω, содержащая начало координат, и гармоническая функция $H(P)$, определенная в Ω, удовлетворяющая в Ω неравенству $|H(P)| < 1$ и обращающаяся в нуль в точках границы Ω, не принадлежащих $\Delta^{(n)}$, выполняется неравенство

$$|H(0)| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Возможность удовлетворить условию f) вытекает из леммы 5. Что же касается условий d) и e), то им, очевидно, удовлетворить можно.

Через D мы обозначим область, получающуюся удалением из сферы D_0 точек, принадлежащих множеству Π и всем множествам $\Delta^{(n)}$. В силу условия d) область D односвязна. Легко усмотреть, что граница области D есть простая замкнутая поверхность Жордана. Мы будем ее обозначать через S. Часть S, принадлежащую границе сферы D_0, обозначим через S_0; множество точек S, получаемое удалением из S множеств Π и S_0, обозначим через S_1. Пользуясь тем, что множество Π имеет поверхностную меру нуль, и условием e), легко усмотреть, что S имеет конечную площадь

$$\text{пл}(S) \leqslant \text{пл}\,(S_0) + \frac{1}{2}\cdot$$

Докажем, что область D удовлетворяет условиям предложения, сформулированного в начале этого параграфа. Прежде всего мы покажем, что проблема Дирихле разрешима в области D при любых непрерывных данных на поверхности S.

Заметим прежде всего, что всякая точка S, принадлежащая $S_0 + S_1$, есть регулярная точка. В самом деле, в окрестности такой точки P поверхность S кусочноаналитична. Отсюда следует, что P есть регулярная точка и, более того, точка устойчивости задачи Дирихле. Нужно еще показать, что любая точка множества Π есть регулярная точка. Для этого достаточно установить существование регулярной гармонической функции W, определенной и ограниченной в D, обращающейся в нуль на части границы S_0 и равной единице на $S_1 + \Pi$ (см. § 3).

Пусть D_n область, получаемая удалением из сферы D_0 множества точек $\Delta_n = \Delta^{(2)} + \Delta^{(3)} + \ldots + \Delta^{(n)}$ и точек, принадлежащих всем сферам n-го порядка $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Через $D^{(n)}$ обозначим область, получаемую удалением из D_0 всех сфер n-го порядка $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Пусть W_n гармоническая в D_n функция, равная нулю в точках границы D_n, принадлежащих S_0, и равная единице во всех точках границы D_n, принадлежащих D_0. Под U_n мы будем подразумевать функцию, определенную в условии c).

Имея в виду, что $\sum\limits_{(k_1 \ldots k_n)} \sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ содержит $\Delta^{(n)}$ и все сферы $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ и применяя принцип максимума, убеждаемся, что в области D_n

$$W_n > W_{n+1}\cdot$$

В самом деле, в точках границы D_n, принадлежащих S_0 и $\Delta^{(n)}$, имеем $W_n = W_{n+1}$, а на сферах $\sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ выполняется неравенство

$W_n = 1 > W_{n+1}$. Замечая, что $W_n > 0$, на основании теоремы Harnack'а заключаем, что последовательность W_n сходится равномерно внутри D. Пусть W предельная функция этой последовательности. Функция W гармонична в D и имеет предельные значения, равные нулю на S_0, так как $W < W_n$. Предельные значения W на S_1 равны единице, так как точки S_1 регулярны. Остается доказать, что предельные значения W равны единице в точках множества Π. В этом легко убедиться, сравнив области D_n и $D^{(n)}$ и применив принцип максимума к разности $W_n - U_n$. Имеем в D_n неравенство

$$U_n < W_n,$$

и следовательно,

$$U < W;$$

но предельные значения U, а следовательно, и W на множестве Π равны единице.

Докажем теперь, что проблема Дирихле неустойчива внутри области D.

В самом деле, рассмотрим функцию $U(P)$, определенную на стр. 580. Функция $U(P)$ есть правильная гармоническая функция в области D, имеющая непрерывные предельные значения на S.

В начале координат имеем

$$U(0) > 1 - \varepsilon. \tag{39}$$

Пусть $\varphi(P)$ непрерывная во всем пространстве функция, совпадающая с $U(P)$ в сфере D_0 и равная нулю вне сферы D_0. Значения $\varphi(P)$ на S, очевидно, совпадают с предельными значениями $U(P)$ на S. Мы покажем, что какова бы ни была односвязная область D', граница S' которой есть поверхность Жордана, целиком лежащая вне области $\bar{D} = D + S$, гармоническая функция $U'(P)$, определенная в D' и имеющая на S' предельные значения, равные $\varphi(P)$, удовлетворяет неравенству

$$U'(0) < \varepsilon. \tag{40}$$

Предполагая, что $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и сравнивая неравенства (39) и (40), убеждаемся, что проблема Дирихле с граничными данными на S, равными $\varphi(P)$, неустойчива в области D.

Докажем неравенство (40). Для этого заметим прежде всего, что точки поверхности S' лежат в области, образованной внешностью сферы D_0 и конечным числом множеств $\Delta^{(n)}$. В самом деле, если бы существовало бесконечное множество $\Delta^{(n)}$, содержащих точки S', то расстояние между S' и Π было бы равно нулю и, следовательно, S' и Π имели бы общую точку, что не-

возможно по предположению. Пусть $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, ..., $\Delta^{(n)}$ суть все те области $\Delta^{(k)}$, которые содержат точки S'. Обозначим через $H_k(P)$ гармонические функции, определенные вне $\Delta^{(k)}$, принимающие значение 1 на границе $\Delta^{(k)}$ и обращающиеся в нуль на бесконечности. Согласно f) имеем

$$|H_k(0)| < \frac{\varepsilon}{2^k};$$

с другой стороны, имея в виду, что $\varphi(P) = 0$ вне D_0, $\varphi(P) < 1$ в D_0 и применяя принцип максимума, заключаем:

$$U'(P) < H_1(P) + H_2(P) + \ldots + H_n(P)$$

в области D' и, следовательно,

$$U'(0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon.$$

Таким образом, D удовлетворяет всем поставленным выше условиям.

Заметим, что каждая точка неустойчивости границы S области D есть точка множества Π. Множество Π, как уже было отмечено, имеет поверхностную меру, равную нулю. С другой стороны, из теоремы 4 следует, что гармоническая мера множества Π положительна. Пользуясь свойствами c) и f), можно показать, что гармоническая мера Π превосходит $1 - 2\varepsilon$. Таким образом, имеем следующее предложение:

Существуют односвязная область D, ограниченная простой замкнутой поверхностью Жордана S конечной площади, и совершенное множество Π, лежащее на S, поверхностной меры нуль и такое, что гармоническая мера Π в точке области D превосходит $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно малое число.

Отсюда, в частности, вытекает следующее предложение:

Существуют односвязная область D, ограниченная простой замкнутой поверхностью Жордана S конечной площади, и ограниченная гармоническая функция, отличная от нуля и имеющая почти всюду на S предельные значения, равные нулю.

В самом деле, всем условиям теоремы удовлетворяет гармоническая мера множества Π

$$G(\Pi, D, P).$$

ГЛАВА IV. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ

§ 9. Понятие внутренней емкости открытого множества

Можно указать критерий устойчивости задачи Дирихле в точке границы S области D, аналогичный критерию Wiener'а для того,

чтобы точка границы была регулярной. Для формулировки этого критерия нам понадобится понятие внутренней емкости открытого множества, аналогичное обычному понятию емкости множества.

Пусть O открытое множество, дополнение к которому есть связный континуум, содержащий бесконечно удаленную точку. Обозначим через $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$ последовательность открытых множеств, обладающих следующими свойствами:

a) Множество O_n содержится в O_{n+1} и в O и при $n \to \infty$

$$\lim O_n = O.$$

b) Множество O_n ограничено конечным числом аналитических поверхностей и его граница Σ_n является в то же время границей области, содержащей бесконечно удаленную точку.

Построим последовательность функций V_n, гармонических вне множеств $O_n + \Sigma_n$, имеющих на Σ_n предельные значения, равные единице, и исчезающих на бесконечности.

Внутренней емкостью множества O мы будем называть число

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi} \lim_{n\to\infty} \iint_{\Sigma_n} \frac{\partial V_n}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

где ν есть нормаль к поверхности Σ_n, направленная вне множества O_n. В том случае, когда множество O есть открытое множество, граница Σ которого есть сумма конечного числа аналитических поверхностей, ограничивающих область, содержащую бесконечно удаленную точку, внутренняя емкость множества O может быть определена непосредственно формулой

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

где V — гармоническая функция, определенная вне $O + \Sigma$, исчезающая на бесконечности и имеющая предельные значения, равные единице на Σ.

В этом случае внутренняя емкость O совпадает с обычной емкостью O. Вообще говоря, внутренняя емкость λ не превосходит обычной емкости γ множества O. В этом легко убедиться на основании принципа максимума.

Отметим следующее предложение, доказательство которого непосредственно вытекает из принципа максимума:

Пусть O открытое множество, дополнение которого связно, E замкнутое множество, лежащее внутри O. Емкость множества E не превосходит внутренней емкости множества O.

§ 10. Необходимое и достаточное условие устойчивости задачи Дирихле в точке

Пользуясь определением внутренней емкости, мы можем сформулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 6. *Пусть P граничная точка D, λ_n внутренняя емкость множества E_n точек дополнения к $\overline{D} = D + S$, расстояние которых от точки P заключено между 2^{-n+1} и 2^{-n}. Точка P является точкой устойчивости или точкой неустойчивости задачи Дирихле в зависимости от того, расходится или сходится ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_n. \tag{41}$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующую известную лемму:

Пусть O ограничено системой Σ аналитических поверхностей, V гармоническая функция, определенная вне $O + \Sigma$, равная единице на границе O и исчезающая на бесконечности, и пусть γ емкость E. Тогда

$$\frac{\gamma}{r''} < V(P) < \frac{\gamma}{r'}, \tag{42}$$

где r'' — максимальное и r' — минимальное расстояние от P до точек множества $\overline{O} = O + \Sigma$.

Докажем теперь, что если ряд (41) сходится, то точка P есть точка неустойчивости.

Для этого подберем такое число m, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} 2^n \lambda_n < \frac{1}{4}. \tag{43}$$

Пусть $\varphi(M)$ непрерывная во всем пространстве функция, равная нулю вне сферы σ_{m-1} радиуса 2^{-m+1} с центром в точке P, принимающая значение единицы в точке P и нигде не превосходящая по абсолютной величине единицу. Мы покажем, что задача Дирихле в области D, с граничными данными $\varphi(M)$ на S, неустойчива в точке P.

* Как известно, согласно Wiener'у точка P границы S области D является регулярной или иррегулярной точкой, в зависимости от того, расходится или сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \gamma_n,$$

где γ_n есть емкость множества E_n точек дополнения к D, расстояние которых от P заключено между 2^{-n-1} и 2^{-n}.

В самом деле, пусть S' какая-нибудь аналитическая поверхность, лежащая вне области $\bar{D}$, и U гармоническая функция, определенная внутри области $D' \supset \bar{D}$, ограниченной поверхностью S', и принимающая предельные значения $\varphi(M)$ на S'. Вся поверхность S' лежит вне некоторой сферы с центром в точке P и радиуса 2^{-q}. Обозначим через O_n множество точек дополнения к D', лежащее в слое, заключенном между сферами радиусов 2^{-n+1} и 2^{-n} с центрами в точке P. Пусть W_n гармоническая функция, определенная в области ϑ_n, являющейся дополнением к $\bar{O}_n$, исчезающая на бесконечности и принимающая на границе ϑ_n значения, равные единице. Тогда имеем

$$U \leqslant W_m + W_{m+1} + \ldots + W_q = V_{m,q}.$$

В самом деле, на части границы S', лежащей вне сферы σ_{m-1}, имеем $U = 0$ и $V_{m,q} > 0$, а на части границы, лежащей внутри этой сферы, $U \leqslant 1$, $V_{m,q} \geqslant 1$.

С другой стороны, емкость множества O_n не превосходит λ_n и, следовательно, в силу (42)

$$W_n(P) < 2^n \lambda_n,$$

а поэтому

$$U(P) < \sum_{n=m}^{q} 2^n \lambda_n < \frac{1}{4}.$$

Это доказывает неустойчивость рассматриваемой задачи Дирихле в точке P.

Для того чтобы доказать вторую часть теоремы, мы отметим прежде всего следующую элементарную лемму:

ЛЕММА 6. *Пусть $V(P)$ гармоническая функция, определенная в сфере $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, удовлетворяющая неравенству $0 < V(P) < 1$ и принимающая значение $V_0 < 1$ в начале координат. Тогда в точке P сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \theta^2 R^2$, $0 < \theta < 1$, удовлетворяется неравенство*

$$V(P) \leqslant f(\theta, V_0) = \frac{2(1+\theta) V_0}{\sqrt{(1-\theta)^2 + 4\theta V_0}\,\left(1 - \theta + \sqrt{(1-\theta)^2 + 4\theta V_0}\right)} < 1;$$

при этом знак равенства достигается для функции $U(P)$, имеющей предельные значения, равные единице во всех точках сферы Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, удовлетворяющих неравенству

$$\cos(\widehat{OP, OM}) > 1 - 2V_0,$$

где M — произвольная фиксированная точка сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, и предельные значения равные нулю в остальных точках этой сферы.

В самом деле, пусть $V(P)$ функция, имеющая непрерывные предельные значения и удовлетворяющая условиям леммы. Тогда имеем (полагая $R=1$)

$$\iint_{\Sigma} V\,d\sigma = \iint_{\Sigma} U\,d\sigma = 4\pi V_0. \tag{44}$$

С другой стороны, функция V выражается интегралом Пуассона:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{(1-\rho^2)\,V(M)\,d\sigma}{(1+\rho^2-2\rho\cos\psi)^{3/2}},$$

где $\rho = \overline{OP}$ и ψ есть угол между лучами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM}$. Имея в виду неравенство $0 < V(M) < 1$ и то, что множитель при V под знаком интеграла есть убывающая функция ψ, заключаем, что

$$V(P) \leqslant U(P).$$

Непосредственное вычисление U дает $U(P) = f\left(\frac{\overline{OP}}{R},\ V_0\right)$.

Таким образом, лемма доказана для непрерывной в замкнутой сфере функции V. Предельным переходом легко ее распространить на любую ограниченную функцию.

Допустим теперь, что в точке P поверхности S ряд (41) расходится. Для того чтобы доказать что проблема Дирихле всегда устойчива в точке P поверхности S, согласно § 3 достаточно показать, что устойчива задача Дирихле с граничными данными на S, равными единице в точках S, принадлежащих сфере $PM \leqslant 1$, и нулю вне этой сферы*.

В силу расходимости ряда (41) расходится один из рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{3i+j}\lambda_{3i+j} \quad (j = 1,\ 2,\ 3).$$

Подобным изменением области D мы можем всегда достигнуть того, чтобы расходился ряд, соответствующий $j=3$. Обозначим через O_n множество точек дополнения к области $\bar{D} = D + S$, принадлежащее слою, заключенному между сферами радиусов 2^{-3n-2} и 2^{-3n-3} с центрами в точке P, удовлетворяющее следующему условию: множество O_n есть сумма конечного числа односвязных областей, каждая из которых ограничена аналитической поверхностью; емкость γ_n множества O_n превосходит $\frac{1}{2}\lambda_{3(n+1)}$. Такие множества существуют в силу самого определения внутренней емкости. Очевидно, ряд

$$\sum 2^{3n}\gamma_n \tag{45}$$

* Мы считаем, что S имеет точки, лежащие вне сферы $\overline{PM} \leqslant 1$.

расходится. Пусть W_n гармоническая функция, определенная в области Δ_n, получаемой удалением из сферы $\overline{PM} \leqslant 1$ множеств $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$, исчезающая на сфере $\overline{PM} = 1$ и имеющая предельные значения, равные единице на границах $O_j (j \leqslant n)$. Мы докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} W_n(P) = 1. \tag{46}$$

В самом деле, если это не так, то

$$W_n(P) < \alpha < 1, \tag{47}$$

так как функции $W_n(P)$ возрастают вместе с n. Имея в виду, что $W_n(M) < 1$ и гармонична в сфере $\overline{PM} \leqslant 2^{-3n}$, на основании доказанной леммы заключаем, что $W_n(M) < k < 1$ в слое $2^{-3n-3} \leqslant \overline{PM} \leqslant 2^{-3n-2}$, где k зависит только от α. Пусть $H_n(M)$ гармоническая функция, определенная вне O_n, принимающая значения, равные единице на границе O_n и исчезающая на бесконечности. Положим

$$H'_n(M) = (1-k)\left\{H_n(M) - \frac{\gamma_n}{2^{-3n} - 2^{-3n-2}}\right\}.$$

На основании (42) функция $H'_n(M)$ отрицательна при $\overline{PM} \geqslant 2^{-3n}$ (так как расстояние от таких точек M до всякой точки O_n превосходит $2^{-3n} - 2^{-3n-2}$), а в начале координат

$$H'_n(0) > (1-k)\left\{\frac{\gamma_n}{2^{-3n-2}} - \frac{\gamma_n}{2^{-3n} - 2^{-3n-2}}\right\} > (1-k)\,\gamma_n 2^{3n}.$$

Из указанных свойств $H'_n(M)$ следует

$$W_{n+1}(M) > W_n(M) + H'_n(M).$$

В самом деле, правая часть отрицательна на сфере $\overline{PM} = 1$, а на границах O_k не превосходит единицы. Таким образом написанное неравенство выполняется на границе области Δ_{n+1}, а следовательно, и всюду в Δ_{n+1}. Но тогда

$$W_{n+1}(0) > W_n(0) + 2^{3n}(1-k)\gamma_n.$$

Но это неравенство не совместимо с (46), так как ряд (45) расходится.

Пусть теперь $\varphi(M)$ непрерывная вне $\overline{D}$ функция, равная единице в точках сферы $\overline{PM} \leqslant 1$ и принимающая предельные значения, равные нулю в точках S, лежащих вне этой сферы. Пусть $D_n \supset \overline{D}$ последовательность областей, ограниченных простыми аналитическими поверхностями S_n, сходящимися к S. Обозначим через $U_n(M)$ гармоническую в D_n функцию, принимающую на S_n значения $\varphi(M)$. Чтобы доказать устойчивость проблемы Дирихле в точке P, достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} U_n(P) = 1.$$

Множества O_1, O_2, ..., O_m, начиная с некоторого момента, остаются вне области D_n. Пусть δ_n общая часть областей D_n и Δ_m. На границе δ_n имеем

$$U_n(M) > W_m(M).$$

В самом деле, в точках границы δ_n, принадлежащих S_n, имеем $U_n = 1$, $W_n \leqslant 1$, а в точках границы δ_n, принадлежащих сфере $\overline{PM} = 1$, имеем $U_n \geqslant 0$, $W_n = 0$. Так как P содержится в δ_n, из доказанного следует

$$U_n(P) > W_m(P)$$

и поэтому в силу (46) и так как $U_n(P) < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} U_n(P) = 1.$$

Таким образом, теорема 6 полностью доказана.

§ 11. Геометрический, достаточный критерий устойчивости

Доказанная теорема позволяет установить простое и наглядное геометрическое условие, достаточное для того, чтобы точка P границы S была точкой устойчивости.

Пусть $\sigma(r)$ поверхность сферы с центром в точке P и радиуса r. Обозначим через $\delta(r)$ наибольший диаметр связной части множества точек $e(r)$ сферы $\sigma(r)$, принадлежащих дополнению к замкнутой области $\overline{D}$. Тогда имеет место следующее предложение:

Для того чтобы точка P поверхности S была точкой устойчивости, достаточно, чтобы существовали числа $r_0 > 0$ и $k > 0$ такие, что при $r < r_0$

$$\delta(r) > r^k. \tag{48}$$

Заметим прежде всего, что теорему достаточно доказать при $k>1$.

Для доказательства этого предложения мы оценим снизу внутреннюю емкость множества e_n точек дополнения к $\overline{D}$, заключенных между сферами $\sigma_n = \sigma(2^{-n})$ и $\sigma_{n-1} = \sigma(2^{-n+1})$.

Допустим, что $\frac{1}{2^{n-1}} < r_0$; тогда в силу (48) существует замкнутое множество f_n, содержащееся в e_n и обладающее следующими свойствами: 1) множество $f(r)$ точек f_n, лежащих на $\sigma(r)$, либо пусто либо связно; 2) диаметр $d(r)$ множества $f(r)$ удовлетворяет неравенству

$$d(r) > r^k \tag{49}$$

для множества η значений r, принадлежащих интервалу $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$,

линейная мера которого превосходит $\frac{1}{2^n} - \varepsilon_n$, где ε_n сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Внутренняя емкость λ_n множества e_n превосходит емкость γ_n множества f_n, поэтому нам достаточно оценить снизу число γ_n.

Обозначим через P'_r, P''_r концы диаметра множества $f(r)$; пусть $M(r, s)$ ближайшая к отрезку $\overline{P'_rP''_r}$ точка пересечения множества $f(r)$ с плоскостью, проходящей через точку s отрезка $P'_rP''_r$ и перпендикулярной к этому отрезку. Через $\rho(s, r; M)$ мы обозначим расстояние от произвольной точки M до точки $M(r, s)$. Пусть точка M принадлежит сфере $\sigma(r')$ и проектируется в точку s' прямой $P'_rP''_r$. Тогда имеем

$$\rho(s, r; M) > \frac{1}{2}(|r - r'| + |s - s'|).$$

Пусть P'''_r точка отрезка $\overline{P'_rP''_r}$, совпадающая с P''_r, если $d(r) \leqslant \frac{1}{2^{nk}}$, и P'''_r есть точка отрезка $\overline{P'_rP''_r}$, отстоящая на расстоянии $\frac{1}{2^{nk}}$ от P'_r в том случае, когда $d(r) \geqslant \frac{1}{2^{nk}}$. Построим гармоническую, вне множества f_n, функцию

$$V_n = C_n \int\limits_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} dr \int\limits_{P'_rP'''_r} \frac{ds}{\rho(s, r; M)},$$

где

$$C_n = \frac{2^{nk}}{8[1 + n(k+1)\log 2]}.$$

Функция V_n всюду положительна и исчезает на бесконечности. Докажем, что $V_n < 1$ во всем пространстве. В самом деле, пусть M лежит на $\sigma(r')$ и s' проекция M на $P'_rP''_r$. Тогда легко усмотреть, что

$$\int\limits_{P'_rP''_r} \frac{ds}{\rho(s, r; M)} \leqslant 2 \int\limits_{-\frac{1}{2^{nk}}}^{+\frac{1}{2^{nk}}} \frac{d\alpha}{|\alpha| + |r - r'|} =$$

$$= 4\left\{\log\left(\frac{1}{2^{nk}} + |r - r'|\right) - \log|r - r'|\right\}$$

и следовательно,

$$V_n \leqslant 4C_n \int\limits_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left\{\log\left(\frac{1}{2^{nk}} + |r - r'|\right) - \log|r - r'|\right\} dr \leqslant$$

$$\leqslant 4C_n \int\limits_{-\frac{1}{2^n}}^{+\frac{1}{2^n}} \left\{\log\left(\frac{1}{2^{nk}} + |\beta|\right) - \log|\beta|\right\} d\beta =$$

$$= 8\,C_n \left\{ \frac{1}{2^n}\left(1-\log\frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{nk}}\right)\left(1-\log\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{nk}}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{nk}}\left(1-\log\frac{1}{2^{nk}}\right)\right\}.$$

Оценивая разность двух первых слагаемых, пользуясь теоремой о конечном приращении, получаем

$$V_n(M) < 8\,C_n\,\frac{1+n\,(k+1)\log 2}{2^{nk}} < 1.$$

Вычислим еще коэффициент c_n при R^{-1} ($R^2 = x^2+y^2+z^2$) в разложении $V_n(M)$ по степеням $\frac{1}{R}$. Имеем

$$c_n = C_n \int\limits_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} dr \int\limits_{\overline{P_r'P_r''}} ds > C_n\,\frac{1}{2^{nk}}\left(\frac{1}{2^n}-\varepsilon_n\right),$$

так как множество значений r в интервале $(2^{-n},\,2^{-n+1})$, для которых $d(r) < 2^{-nk}$ имеет меру меньше ε_n. Подставляя значение C_n, имеем

$$c_n > \frac{(2^{-n}-\varepsilon_n)}{8\,[1+n\,(k+1)\log 2]}.$$

По определению емкости множества мы можем построить замкнутую аналитическую поверхность Σ, содержащую множество f_n и гармоническую функцию $U'(M)$, определенную вне Σ, исчезающую на бесконечности, принимающую предельные значения, равные единице на Σ, и такую, что коэффициент c_n' при R^{-1} в разложении $U'(M)$ по степеням $\frac{1}{R}$ удовлетворяет неравенству

$$c_n' > \gamma_n + \varepsilon_n,$$

где γ_n—емкость множества f_n. С другой стороны, разность $U'-V_n$ положительна вне Σ и исчезает на бесконечности; поэтому коэффициент при $\frac{1}{R}$ в разложении этой функции, равный $c_n'-c_n$, положителен и, следовательно,

$$\gamma_n > c_n'' - \varepsilon > c_n - \varepsilon,$$

откуда

$$\gamma_n > \frac{2^{-n}-\varepsilon_n}{8\,[1+n\,(k+1)\log 2]}$$

Вспоминая, что внутренняя емкость λ_n множества e_n превосходит γ_n, а ε_n сколь угодно малое число, заключаем

$$\lambda_n > \frac{1}{2^{n+3}\,[1+n\,(k+1)\log 2]}.$$

Отсюда непосредственно следует расходимость ряда $\Sigma\,2^n\lambda_n$, а следовательно, точка P есть точка устойчивости задачи Дирихле.

ГЛАВА V. ПРИЛОЖЕНИЕ К ВОПРОСАМ АПРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

§ 12

Отметим в заключение одно приложение развитой выше теории к задаче апроксимации функций гармоническими полиномами.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть D есть область Жордана, для которой проблема Дирихле всегда разрешима. При этих условиях, для того чтобы любая функция $F(P)$, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$ и гармоническая внутри D, была представима в $\overline{D}$ равномерно сходящимся в $\overline{D}$ рядом гармонических полиномов, необходимо и достаточно, чтобы проблема Дирихле была устойчива в замкнутой области $\overline{D}$.*

Докажем достаточность условия. Построим функцию $\varphi(P)$, непрерывную во всем пространстве и совпадающую с $F(P)$ в области $\overline{D}$. Построим, кроме того, последовательность аналитических поверхностей

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots,$$

расположенных вне $\overline{D}$, равномерно сходящуюся к границе S области D. Пусть $U_n(P)$ есть гармоническая функция, правильная в области D_n, ограниченной S_n, и совпадающая на S_n с $\varphi(P)$. В силу условия устойчивости последовательность $U_1(P)$, $U_2(P), \ldots, U_n(P), \ldots$ сходится равномерно к функции $F(P)$ в замкнутой области $\overline{D}$. С другой стороны, так как D_n содержит $\overline{D}$ и так как $U_n(P)$ правильна в D_n, то отсюда следует, что существует гармонический полином $R_n(P)$, отличающийся от $U_n(P)$ меньше, чем на $\frac{1}{n}$, в каждой точке области $\overline{D}$. Последовательность полиномов $R_1(P)$, $R_2(P), \ldots, R_n(P), \ldots$ есть очевидно искомая.

Докажем теперь, в условиях теоремы, что если любая функция $F(P)$, непрерывная в $\overline{D}$ и гармоническая в D, изобразима равномерно сходящимся рядом гармонических полиномов, то проблема Дирихле устойчива в замкнутой области $\overline{D}$.

Итак, пусть $\varphi(P)$ есть произвольная непрерывная функция, определенная в окрестности границы S области D. Так как согласно условию теоремы проблема Дирихле всегда разрешима для D, то существует гармоническая функция $F(P)$, правильная в D и совпадающая на S с функцией $\varphi(P)$. Заметив это, фиксируем число ε, $\varepsilon > 0$, и построим согласно условиям доказываемой части теоремы гармонический полином $R(P)$, отличающийся от $F(P)$ в каждой точке $\overline{D}$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|R(P) - F(P)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{50}$$

Отсюда, в силу непрерывности $R(P)$ и $\varphi(P)$, существует окрестность Δ поверхности S, для которой будем иметь

$$|R(P)-\varphi(P)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{51}$$

Обозначим, как раньше, через $U_{n,\varphi}(P)$ гармоническую функцию, принимающую на поверхности S_n значения $\varphi(P)$. В силу принципа максимума и (51) для всякой поверхности S_n, принадлежащей Δ, будем иметь

$$|R(P)-U_{n,\varphi}(P)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{52}$$

для всякой точки P, принадлежащей $\overline{D}$. Следовательно, для тех же точек P будем иметь

$$|F(P)-U_{n,\varphi}(P)|<\varepsilon$$

при всех достаточно больших значениях n. Так как ε можно взять сколь угодно малым, а функция $\varphi(P)$ была произвольная непрерывная функция, то отсюда заключаем, что проблема Дирихле устойчива в $\overline{D}$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
4. VII. 1937.

M. KELDYCH et M. LAVRENTIEFF. SUR LA STABILITÉ DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE DIRICHLET

RÉSUMÉ

1. Soit D un domaine de l'espace $M(x, y, z)$ limité par une surface jordanienne S, simple et fermé. Considérons deux suites de domaines

$$D_1^{(1)},\ D_2^{(1)},\ \ldots,\ D_n^{(1)},\ \ldots;$$
$$D_1^{(2)},\ D_2^{(2)},\ \ldots,\ D_n^{(2)},\ \ldots,$$

limités par des surfaces analytiques, $D_k^{(i)}$ par $S_k^{(i)}$ et telles que les $S_k^{(1)}$ sont extérieures à $\overline{D}=D+S$, les $S_k^{(2)}$ sont intérieures à D, les $S_k^{(1)}$ et $S_k^{(2)}$ convergent uniformément vers S pour $k\to\infty$. Attachons à chaque fonction continue $\varphi(x, y, z)$ deux suites de fonctions harmoniques

$$P_1^{(1)}(M,\varphi),\ P_2^{(1)}(M,\varphi),\ \ldots,\ P_n^{(1)}(M,\varphi),\ \ldots;$$
$$P_1^{(2)}(M,\varphi),\ P_2^{(2)}(M,\varphi),\ \ldots,\ P_n^{(2)}(M,\varphi),\ \ldots,$$

où la fonction $P_k^{(i)}(M,\varphi)$ est définie et harmonique dans $D_k^{(i)}$ et coïncide avec $\varphi(M)$ sur la surface $S_k^{(i)}$. Les suites $P_k^{(1)}$ et $P_k^{(2)}$ convergent vers deux fonctions harmoniques dans D, soit $P^{(1)}(M,\varphi)$ et $P^{(2)}(M,\varphi)$ *.

* Les fonctions $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$ ne dépendent que des valeurs de φ sur S.

Définitions. Nous dirons qu'un point M_0 de $\overline{D}$ est un point de stabilité pour le problème de Dirichlet dans D, si, quelle que soit la fonction continue φ, les valeurs limites de $P^{(1)}(M, \varphi)$ et $P^{(2)}(M, \varphi)$ pour $M \to M_0$ et de $P_n^{(2)}(M_0, \varphi)$ pour $n \to \infty$, existent et sont égales à $\varphi(M_0)$.

S'il existe un point de stabilité intérieur à D alors chaque point intérieur à D est un point de stabilité; dans ce cas nous dirons que le problème de Dirichlet est stable à l'intérieur de D.

Si chaque point de S est un point de stabilité, on peut démontrer que la suite $P_n^{(1)}(M, \varphi)$ converge uniformément vers φ sur S. Dans ce cas nous dirons que le problème de Dirichlet est stable dans le domaine fermé D.

2. Indiquons quelques résultats concernant la stabilité du problème de Dirichlet.

THÉORÈME I. *Pour qu'un point régulier de S (par rapport au problème de Dirichlet) soit un point de stabilité, il est suffisant que le problème de Dirichlet soit stable à l'interieur de D.*

Corollaire. *Pour que le problème de Dirichlet soit stable dans le domaine fermé D, il faut et il suffit 1° que le problème de Dirichlet soit toujours possible dans D; 2° que ce problème soit stable à l'intérieur de D.*

THÉORÈME II. *Pour que le problème de Dirichlet soit stable à l'intérieur de D, il est nécessaire et suffisant que l'ensemble des points d'instabilité de S soit de mesure harmonique nulle.*

Remarquons que chaque ensemble de points de S que l'on peut enfermer dans un système de sphères, dont la somme de diamètres est aussi petite que l'on veut, est de mesure harmonique nulle.

THÉORÈME III. *Il existe un domaine D, dont la frontière S est une surface jordanienne d'aire finie et telle que le problème de Dirichlet est toujours possible dans D et est instable à l'intérieur de D.*

De plus, le domaine D peut être construit de telle manière que l'ensemble E des points d'instabilité soit un ensemble de mesure superficielle nulle. D'après le théorème II, cet ensemble E est de mesure harmonique positive.

3. Soit E un ensemble ouvert, $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ une suite d'ensembles ouverts convergeant vers E; E_n est contenu dans E et sa frontière S_n est formée d'un nombre fini de surfaces analitiques deux à deux sans points communs. Désignons par V_n la fonction harmonique, définie à l'extérieur de $E_n + S_n$, s'annulant à l'infini et se réduisant à l'unité sur S_n. Nous appelons capacité intérieure de l'ensemble ouvert E le nombre λ défini par l'égalité

$$\lambda = \lim \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{dV_n}{d\nu} d\sigma,$$

ν étant la normale intérieure de S_n.

THÉORÈME IV. *Soit M un point frontière du domaine D. Désignons par λ_k la capacité intérieure de l'ensemble des points non situés dans $\overline{D} = D + S$ et dont la distance à M est comprise entre $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. Alors, M est un point de stabilité ou non suivant que la série de terme général $\lambda_k/2^k$ diverge ou converge.*

4. La notion de stabilité du problème de Dirichlet est en rapport direct avec le problème de la représentation des fonctions par des séries de polynômes harmoniques.

THÉORÈME V. *Lorsque le problème de Dirichlet est possible dans D, pour que chaque fonction continue dans $\overline{D}$ et harmonique dans D soit la limite d'une suite de polynômes harmoniques uniformément convergente dans $\overline{D}$, il faut et il suffit que le problème de Dirichlet soit stable dans le domaine fermé $\overline{D}$.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ МИНКОВСКОГО И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ТЕОРЕМ О ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Дается элементарное доказательство теоремы Минковского о том, что выпуклый многогранник вполне определяется площадями и направлениями своих граней. Кроме того, доказывается, что выпуклый многогранник также вполне определяется направлениями и периметрами своих граней.

Г. Минковский во вступлении к своей работе «Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder» (1) писал:

«Der vorliegende Aufsatz entstand bei Gelegenheit von Versuchen den folgenden Satz zu beweisen, den ich seit längerer Zeit vermutete und dessen elementare Fassung nicht auf die Schwierigkeiten seiner Verifizierung schliessen lässt: Wenn aus einer endlichen Anzahl von lauter Körpern mit Mittelpunkt, die unter einander nur in den Begrenzungen zusammenstossen, sich ein konvexer Körper aufbaut, so hat dieser stets ebenfalls einer Mittelpunkt».

Минковский получил эту теорему как следствие другой, более общей теоремы, являющейся основным результатом его упомянутой работы о многогранниках:

Выпуклый многогранник однозначно, с точностью до параллельного переноса, определяется заданием направлений и площадей его граней. Направление грани означает здесь направление внешней нормали к ней.

Доказательство этой теоремы, данное Минковским, основано на неравенстве Брунна, установление которого требовало далеко не элементарных и довольно сложных рассуждений. Это обстоятельство, отмеченное Минковским в цитированной выше фразе, ставило его теорему в особое положение среди других результатов теории многогранников. Поэтому оставалась потребность в таком ее доказательстве, которое по своей элементарности вполне соответствовало бы ее формулировке.

В предлагаемой работе эта задача решается тем более неожиданным образом, что, основываясь на результатах, уже давно известных в теории многогранников, я элементарным путем доказываю даже более общую теорему, из которой теорема Минковского получается как частный случай, правда, только для трехмерных многогранников.

Связь теоремы Минковского с неравенством Брунна оказывается обратимой: воспользовавшись теоремой Минковского, я доказываю неравенство Брунна для выпуклых многогранников.

§ 1. Основные элементы применяемого метода

В основании теории многогранников лежит известная теорема Эйлера. Опираясь на некоторое ее расширение, Коши доказал другую замечательную топологическую теорему о многогранниках, которую он применил к доказательству теоремы о равенстве выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней.

Теорема Коши, о которой идет речь, состоит в следующем: невозможно сопоставить каждому ребру выпуклого многогранника положительный или отрицательный знак, или нуль так, чтобы хоть одно ребро получило определенный знак (а не нуль) и чтобы при обходе вокруг каждой грани, на ребрах которой не стоят сплошь нули, получалось не менее четырех перемен знака *.

Эта теорема и служит главной основой применяемого мною метода. Таким образом, идея Коши еще раз обнаруживает свою силу как средство доказательств, а потому я буду говорить о ней как о «принципе Коши».

Другой важный элемент моих рассуждений представляет смешение выпуклых многогранников или многоугольников. Эта операция, введенная Брунном, заключается в следующем. Пусть имеются два выпуклых многогранника H_1 и H_2 (или два выпуклых многоугольника в параллельных плоскостях). Соединим каждую точку одного из них (включая и внутренние точки) с каждой точкой другого прямолинейным отрезком и возьмем геометрическое место середин этих отрезков. Оно будет выпуклым многогранником (или многоугольником, лежащим в плоскости, параллельной плоскостям смешиваемых многоугольников), который обозначается $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ [4, 5].

* См. [2]. Сам Коши не дал, как известно, исчерпывающего доказательства этой теоремы. Полное доказательство см., например [3]. Теорема Коши формулируется обычно иначе: вместо обхода вокруг граней говорят об обходе вокруг вершин, но это не составляет разницы, как это видно, если перейти от данного многогранника к дуальному.

Основное свойство операции смешения, которое нам понадобится, состоит в том, что каждый элемент огранения—грань, ребро, вершина—многогранника $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ получается в результате смешения элементов огранения, лежащих на многогранниках H_1 и H_2 в параллельных опорных плоскостях. (Здесь и в дальнейшем параллельность опорных плоскостей, опорных прямых, граней и т. п. мы понимаем в смысле параллельности внешних нормалей к ним.) Грань на $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ может получаться от смешения пары параллельных граней, от смешения грани с ребром или с вершиной или еще от смешения пары непараллельных ребер, лежащих в параллельных опорных плоскостях на H_1 и H_2. Ребро на $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ получается или от смешения пары параллельных ребер или ребра и вершины, лежащих на H_1 и H_2 в параллельных опорных плоскостях.

При смешении многоугольников P_1 и P_2 получается многоугольник $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, стороны которого суть полусуммы параллельных сторон многоугольников P_1 и P_2. При этом если стороне одного из них не соответствует параллельная сторона на другом, то считается, что она есть, только имеет длину нуль. Это условие мы будем далее иметь в виду без специальных оговорок.

§ 2. Одна теорема о выпуклых многоугольниках

Мы будем говорить, что многоугольник P_1 помещается в многоугольнике P_2, если все точки P_1 лежат в P_2. Если, кроме того, хотя бы одна сторона P_1 попадает внутрь P_2, то будем говорить, что P_1 помещается внутри P_2. При рассмотрении сторон двух многоугольников мы будем сравнивать только стороны с параллельными внешними нормалями (помня условие о сторонах нулевой длины) и поэтому для краткости будем опускать указание на это. Наконец, будем еще говорить, что стороны $l_1, l_2, \ldots, l_n$ больше сторон $l_1', l_2', \ldots, l_n'$, если $l_1 \geqslant l_1', \ldots, l_n \geqslant l_n'$ и хотя бы для одной пары $l_i > l_i'$.

ТЕОРЕМА. *Если два выпуклых многоугольника P_1 и P_2 не могут быть помещены один в другом путем параллельного переноса, то разности длин их сторон меняют знак не менее четырех раз при обходе вокруг любого из них.*

ЛЕММА А. *Если у P_1 все стороны, кроме одной l_0, меньше, чем у P_2, то P_1 может быть параллельным переносом помещен внутри P_2.*

Возьмем на P_1 и P_2 соответственные вершины A_1 и A_2, через которые проходят опорные прямые с внешними нормалями, антипараллельными нормали к l_0, и совместим P_1 и P_2 этими верши-

нами. Вершина A_1 и сторона l_0 разделяют на P_1 две ломаные P_1' и P_1''. Аналогично на P_2 будут две ломаные P_2' и P_2''. P_1' не выходит из P_2 через P_2'. Иначе, как легко усмотреть, на P_1' была бы сторона большая, чем на P_2'. Таким образом, и P_1'' не выходит из P_2 через P_2''. Поэтому P_1 оказывается внутри P_2.

ЛЕММА В. *Пусть у двух многоугольников P_1 и P_2 есть пара общих опорных прямых, пересекающихся в точке O. Пусть P_1' и P_2' части границ P_1 и P_2, обращенные выпуклостью в сторону O. Если какой-нибудь луч из O пересекает P_1' раньше P_2', то на P_1' есть сторона меньшая, чем на P_2'.*

Для доказательства будем подобно сжимать P_2' к O. В тот момент, когда P_2' окажется уже в области угла с вершиной O, ограниченной P_1', но будет еще соприкасаться с P_1', любая их общая сторона будет на P_2' не меньше, чем на P_1'. Этим лемма доказана.

Пусть теперь P_1 и P_2 многоугольники, удовлетворяющие условиям теоремы. Если все стороны на P_1 меньше, чем на P_2, то P_1 можно поместить в P_2. Поэтому разности длин их сторон меняют знак не менее двух раз. Допустим, что имеется всего две перемены знака. Можно, конечно, предположить, при заданном направлении отсчета углов, что углы между нормалями к крайним сторонам, большим на P_1, чем на P_2, меньше π (иначе переменим номера у многоугольников). Разобьем границы P_1 и P_2 на части P_1', P_1'' и P_2', P_2'' такие, что стороны на P_1' меньше, чем на P_2', а на P_1'' и P_2'' наоборот.

Из леммы А следует, что P_1' можно поместить внутри P_2. При этом однако, по условию теоремы, P_1'' будет выходить из P_2. Возьмем на P_1'' точку, где есть опорная прямая, не пересекающая P_2. Двигая эту точку по P_1'' и поворачивая вместе с тем опорную прямую сперва в одну, а потом в другую сторону, мы получим пару общих опорных прямых a и b к P_1 и P_2, касающихся P_1 в точках, принадлежащих P_1''.

Так как угол между нормалями к крайним сторонам на P_1'' меньше π, то P_1'' обращено выпуклостью к точке пересечения O прямых a и b. Точки касания опорных прямых a и b к P_2 лежат от O дальше, чем точки их касания к P_1. Вместе с тем эти точки касания принадлежат P_2''. (Это, как легко усмотреть, следует из того, что стороны P_1' и P_2' параллельны и P_1' лежит внутри P_2.) Отсюда по лемме В на P_2'' есть стороны больше, чем на P_1''. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Наша теорема вместе с ее доказательством, очевидно, обобщается на произвольные замкнутые выпуклые кривые. Возьмем такую кривую P и на единичной окружности E дугу φ. Пусть $l(\varphi)$ длина дуги на P, состоящей из всех тех точек через которые проходят опорные прямые с внешними нормалями,

направленными в φ, если они проведены из центра E. Обобщение нашей теоремы гласит:

Если две замкнутые выпуклые кривые P_1 и P_2 не могут быть помещены одна в другой параллельными переносами, то единичная окружность разбивается минимум на четыре такие дуги φ_k, что $l_1(\varphi_k)-l_2(\varphi_k)$ меняет знак при переходе от одной дуги к соседней ($l_1(\varphi_k)$—длина дуги P_1, $l_2(\varphi_k)$—длина дуги P_2).

В случае дважды дифференцируемых кривых $l(\varphi)$ есть интеграл от радиуса кривизны по $d\varphi$. Поэтому из указанной теоремы сразу следует известная «теорема о четырех вершинах» (Vierscheitelsatz).

§ 3. Доказательство теоремы Минковского

ТЕОРЕМА. *Если у двух выпуклых многогранников грани одного соответствует грань другого с параллельной внешней нормалью, и обратно, и если их соответственные грани не могут быть помещены одна внутри другой параллельными переносами, то многогранники равны и параллельно расположены.* (Здесь можно даже считать, что если на одном из многогранников нет грани с той же внешней нормалью, что и на другом, то она есть, но вырождается в ребро, лежащее в соответствующей опорной плоскости.)

Пусть H_1 и H_2 два многогранника, удовлетворяющие условиям теоремы. Построим многогранник

$$H=\frac{1}{2}(H_1+H_2).$$

Каждое ребро многогранника H возникает или в результате смешения пары параллельных ребер, лежащих в параллельных опорных плоскостях на H_1 и H_2, или в результате смешения ребра одного из многогранников H_1 и H_2 с вершиной другого, причем смешивающиеся ребро и вершина лежат в параллельных опорных плоскостях. Во втором случае можно также считать, что ребро на H возникает при смешении ребер на H_1 и H_2, но только одно из них имеет длину нуль. При этом условии можно сказать, что каждому ребру многогранника H соответствует по ребру на H_1 и H_2, результатом смешения которых оно является.

Отнесем каждому ребру многогранника H знак плюс или минус, в зависимости от того, длиннее или короче соответствующее ребро на H_1, чем на H_2; в случае же равенства этих ребер относим ребру на H нуль. (Помним условие о ребрах длины нуль.)

Докажем, что при обходе вокруг каждой грани многогранника H, хоть одно ребро которой снабжено знаком, мы должны получить не менее четырех перемен знака.

Грани многогранника H будут двух родов. Грани первого рода получаются при смешении параллельных граней многогранников

H_1 и H_2. Грани второго рода получаются при смешении пар непараллельных ребер, лежащих в параллельных опорных плоскостях на H_1 и H_2. (Другие возможности исключены из-за попарной параллельности граней H_1 и H_2.)

Так как параллельные грани многогранников H_1 и H_2 имеют равные площади, то по теореме § 2 мы заключаем, что при обходе вокруг каждой грани первого рода мы будем иметь не менее четырех перемен знака, если хоть одно ее ребро снабжено знаком.

Каждая грань P второго рода, как результат смешения двух непараллельных ребер, является параллелограмом. Пусть L_1 ребро на H_1 и L_2 ребро на H_2, дающие при смешении такую грань P. В плоскости, опорной к H_2 и параллельной плоскости грани P, нет ребра, параллельного L_1, иначе там имелась бы целая грань, потому что там уже есть ребро L_2. Ребро L_1 смешивается с двумя вершинами, являющимися концами ребра L_2, и дает две противоположные стороны параллелограма P. То же относится к ребру L_2. Отсюда видно, что при обходе вокруг каждой грани второго рода мы имеем ровно четыре перемены знака.

Теперь, воспользовавшись принципом Коши, мы убеждаемся в том, что всем ребрам многогранника H должен соответствовать нуль. Это значит, что параллельные грани многогранников H_1 и H_2 равны, а потому сами эти многогранники также равны и параллельно расположены.

Если у многогранников H_1 и H_2 соответственно параллельные грани имеют равные площади, то они не могут быть помещены одна в другую. Поэтому теорема Минковского есть частный случай нашей теоремы. Точно так же получается, например, следующая теорема:

Если каждой грани одного выпуклого многогранника соответствует грань другого с параллельной внешней нормалью и с тем же периметром, и обратно, то такие многогранники равны и параллельно расположены.

§ 4. Жесткость выпуклого многогранника при стационарности направлений и площадей его граней

Возьмем в плоскости начало и проведем из него n лучей так, чтобы они не были направлены в одну плоскость. Прямые, перпендикулярные этим лучам и пересекающие их, ограничат выпуклый многоугольник. Мы назовем эти прямые ограничивающими этот многоугольник.

ЛЕММА. *Если прямые, ограничивающие данный многоугольник, претерпевают бесконечно малые смещения так, что площадь многоугольника стационарна (т. е. не изменяется с точностью*

до величин второго порядка малости), то изменения длин его сторон не менее четырех раз меняют знак при обходе вокруг него, если только получающаяся деформация многоугольника не сводится к бесконечно малому переносу. При этом считается, что если на многоугольнике возникает новая сторона, то она удлиняется. (Новая сторона может возникнуть, если какая-нибудь из ограничивающих прямых соприкасалась с исходным многоугольником в вершине, но не по стороне.)

Пусть dl_i ($i = 1, \ldots, n$) изменения длин сторон многоугольника. Допустим, что dl_i только дважды меняют знак при обходе вокруг многоугольника. Пусть вершины A_1 и A_2 разделяют удлиняющиеся стороны от укорачивающихся. Возьмем начало на пересечении двух опорных прямых, проходящих через эти вершины. Тогда опорные числа многоугольника h_i меняют знак при переходе через A_1 и A_2, а произведения $h_i\,dl_i$ вовсе не меняют знака. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\,dl_i \tag{1}$$

равна нулю только тогда, когда все dl_i равны нулю. Но сумма (1) есть дифференциал площади многоугольника и, следовательно, по условию равна нулю *. Поэтому или все $dl_i = 0$ и многоугольник не деформируется, а только смещается, или dl_i меняют знак более двух, а значит не менее четырех раз.

ТЕОРЕМА. *Если плоскости граней выпуклого многогранника испытывают бесконечно малые смещения, так что площади граней стационарны, то сам многогранник претерпевает только бесконечно малое параллельное смещение.*

Прямые, получающиеся в пересечении плоскости данной грани P с плоскостями других граней, являются ограничивающими для грани P. При бесконечно малых смещениях граней они также смещаются, и если при этом грань P не испытывает просто параллельный перенос и площадь ее стационарна, то по предыдущей лемме изменения длин ее ребер не менее четырех раз меняют знак при обходе вокруг нее. (Условие о вновь возникающих ребрах то же, что и в лемме.)

---

* Площадь многоугольника $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i l_i$; $dS = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i dl_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} l_i\,dh_i$

Вместе с тем $dS = \sum_{i=1}^{n} l_i\,dh_i$, так как $l_i\,dh_i$ есть площадь, зачерчиваемая i-той стороной при смещении dh_i. Отсюда $dS = \sum_{i=1}^{n} h_i dl_i$.

Если отнести удлиняющемуся ребру знак плюс, укорачивающемуся ребру знак минус, а неизменяющемуся ребру нуль, то по принципу Коши мы получим, что всем ребрам должен быть отнесен нуль. Это значит, что длины всех ребер стационарны и, следовательно, многогранник испытывает только бесконечно малый параллельный перенос.

Доказанная таким образом теорема также относится к теореме Минковского, как теорема о жесткости выпуклого многогранника при неизменности его граней относится к теореме Коши о равенстве выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней *.

§ 5. Неравенство Брунна-Минковского для выпуклых многогранников

Пусть H и L два выпуклых многогранника. Соединив каждую точку одного из них с каждой точкой другого прямолинейным отрезком и взяв геометрическое место точек, делящих эти отрезки в отношении $\vartheta:(1-\vartheta)$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$, получим выпуклый многогранник $K_\vartheta = (1-\vartheta)H + \vartheta L$.

Как показал Минковский, объем этого многогранника равен

$$V(K_\vartheta) = (1-\vartheta)^3 V(H,H,H) + 3(1-\vartheta)^2\vartheta V(H,H,L) + \\ + 3(1-\vartheta)\vartheta^2 V(H,L,L) + \vartheta^3 V(L,L,L), \tag{1}$$

где $V(H,H,H)$ и $V(L,L,L)$—объемы H и L, а $V(H,H,L)$ и $V(H,L,L)$—их так называемые смешанные объемы, равные

$$V(H,H,L) = \frac{1}{3}\sum L_i F_i(H), \tag{2}$$

$$V(H,L,L) = \frac{1}{3}\sum H_i F_i(L). \tag{3}$$

Здесь L_i — расстояние от начала до опорной плоскости к L, параллельной плоскости i-той грани многогранника H, площадь которой есть $F_i(H)$.

Аналогичный смысл имеют H_i и $F_i(L)$.

Если мы покажем, что имеют место два неравенства Минковского:

$$\left.\begin{aligned} V(H,H,L)^3 \geqslant V(H,H,H)^2 V(L,L,L), \\ V(H,L,L)^3 \geqslant V(H,H,H)\, V(L,L,L)^2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

* Соответствующая теорема о жесткости многогранника при стационарности периметров и направлений его граней не отличается от теоремы, сформулированной в конце § 3, так как изменения периметров зависят от смещений граней линейно, почему условие их стационарности равносильно их точной неизменности.

где знаки равенства стоят только при гомотетичности H и L, то тем самым, как сразу видно из (1), будет доказано, что если объемы H и L равны, то объем K_ϑ не меньше объема каждого из них и равен ему только тогда, когда H и L равны и параллельно расположены. А это и есть неравенство Брунна с дополнением Минковского.

Пусть H заданный выпуклый многогранник и L переменный многогранник, имеющий, однако, только грани, параллельные граням H. Пусть $L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_n$ опорные числа L, т. е. расстояние плоскостей его граней от начала. Они, конечно, его вполне определяют.

Рассмотрим функцию опорных чисел L_i

$$\Phi(L) = \frac{V(H,H,L)^3}{V(L,L,L)}. \tag{5}$$

Это — однородная функция нулевой степени в силу (2). Поэтому она одинакова для всех гомотетичных друг другу многогранников L, так что ее достаточно рассматривать для многогранников, имеющих один и тот же объем.

Если i-тое опорное число L неограниченно растет, то в силу формулы (2) $V(H,H,L)$ также неограниченно растет, а по условию $V(L,L,L)$ остается постоянным. Отсюда следует, что $\Phi(L)$ достигает минимума для конечного многогранника L.

Минимум $\Phi(L)$ не может достигаться для таких многогранников L, у которых хоть одна грань вырождается в ребро или вершину. Пусть i-тая грань вырождается таким образом. Сдвинем ее плоскость внутрь многогранника L на маленький отрезок δL_i. Изменение объема $\delta V(L, L, L)$ будет порядка $\delta L_i F_i(L)$, где $F_i(L)$ — площадь возникшей при этом грани. Поэтому объем уменьшается на величину не ниже второго порядка малости. А между тем уменьшение $V(H, H, L)$ будет равно $\delta L_i F_i(H)$ [как видно из (2)] и, следовательно, будет первого порядка малости. Отсюда видно, что при проделанном сдвиге плоскости исчезающей грани $\Phi(L)$ убывает.

Следовательно, минимум $\Phi(L)$ достигается для многогранника L, имеющего все невырождающиеся грани, параллельные граням H. Поэтому в точке минимума $\Phi(L)$ имеет частные производные по всем опорным числам L_i и все они должны равняться нулю. Как известно,

$$\frac{\partial V(L,L,L)}{\partial L_i} = F_i(L), \tag{6}$$

а по формуле (2)

$$\frac{\partial V(H,H,L)}{dL_i} = \frac{1}{3} F_i(H); \tag{7}$$

поэтому, вычисляя производные $\frac{\partial\Phi(L)}{\partial L_i}$ и приравнивая их нулю, получим

$$F_i(L) = \lambda F_i(H) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

где

$$\lambda = \frac{V(L,L,L)}{V(H,H,L)}. \tag{9}$$

Равенства (8) означают, что площади параллельных граней многогранников H и L пропорциональны. Поэтому, на основании теоремы Минковского, многогранники H и L гомотетичны. В этом случае

$$\Phi(L) = \frac{V(H,H,L)^3}{V(L,L,L)} = V(H,H,H)^2,$$

а так как это есть минимум $\Phi(L)$, то

$$V(H,H,L)^3 \geqslant V(H,H,H)^2 \, V(L,L,L).$$

Это неравенство доказано нами пока только для того случая, когда многогранник L имеет те же грани, что и многогранник H.

Если взять два любых многогранника H и L, то при всяком ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ многогранники $(1-\vartheta)H + \vartheta L$ и $\vartheta H + (1-\vartheta)L$ будут иметь соответственно параллельные грани. Поэтому для таких многогранников неравенства (4) справедливы. Но они перейдут в те же неравенства для самих H и L, если ϑ устремить к нулю.

Если в неравенствах (4) стоит знак равенства, то, как видно из формулы (1), при равенстве объемов H и L все многогранники K_ϑ имеют тот же объем. При $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ многогранник

$$K_\vartheta = \frac{\vartheta_2 - \vartheta}{\vartheta_2 - \vartheta_1} K_{\vartheta_1} + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} K_{\vartheta_2}$$

и его объем равен объемам K_{ϑ_1} и K_{ϑ_2}. Эти последние имеют соответственно параллельные грани, а значит, должны быть гомотетичными. Отсюда следует, что и многогранники H и L должны быть гомотетичными.

Научно-исслед. институт математики и механики Ленинградского гос. университета.

Поступило 28. IV. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Minkowski H., Allgemeine Lehrzätze über die konvexen Polyeder, Ges. Abh., Bd. II (см. русский перевод в «Успехах математ. наук», в. II, стр. 55, 1936).

[2] Cauchy A., Sur les polygones et les polyèdres. Second mémoire, Journ. École Polyt., t. 9, p. 87, 1813.

[3] Кон-Фоссен С. Э., Изгибаемость поверхностей в целом, Усп. матем. наук, в. I, стр. 39—40, 1936.

[4] Minkowski H., Theorie der konvexen Körper, Ges. Abh., Bd. II, Teubner, 1911.

[5] Bonnesen und Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Springer, 1934.

A. ALEXANDROW. ELEMENTARER BEWEIS DES SATZES VON MINKOWSKI UND ANDERER SÄTZE ÜBER KONVEXE POLYEDER

ZUSAMMENFASSUNG

H. Minkowski hat bewiesen, dass ein konvexes Polyeder eindeutig durch die Richtungen und Inhalten seiner Seiten bestimmt wird. Das Beweis dieses volkommen elementaren Satzes ist auf der Brunnschen Ungleichung begründet, welche bekanntlich den Begriff des Integrales vordert. Da alle andere Sätze der Theorie der Polyeder, nicht nur elementar formuliert, sondern auch elementar bewiesen sein können, war es ganz natürlich elementaren Beweis des Satzes von Minkowski zu suchen.

In der vorliegenden Arbeit geben wir einen elementaren Beweis des genannten Satzes, der auf dem folgenden Satze von Cauchy begründet ist. Dieser Satz lautet: «Es ist unmöglich allen oder nur einigen Kanten eines konvexen Polyeder die Zeichen Plus oder Minus so anzuschreiben, dass beim Umgang jeder Seite dieses Polyeder, welche mindesten einen bezeichneten Kant besitzt, nicht weniger als vier Zeichenänderungen vorliegen».

Der Beweis dieses Satzes vordert bekanntlich nur den Satz Eulers. Es ist leicht das folgende Lemme zu beweisen: Wenn zwei konvexe, nicht homotetische Polygone gleiches Inhalt haben, so ändert die Differenz der Länge ihrer parallelen Kanten den Zeichen nicht weniger als vier Mahle. (Wenn irgend ein Polyeder keinen Kant, besitzt der parallel zu einem Kant des anderen ist, so setzen wir voraus, dass es einen solchen Kant, der Länge Nul besitzt. Die Kanten werden parallel genannt, wenn ihre aüssere Normale parallel sind.)

Der Satz von Minkowski kann in folgender Weise bewiesen werden:

Es seinen H_1 und H_2 zwei konvexe Polyeder, dessen Seiten parallele aussere Normale und gleiche Inhalte besitzen. Wir bilden den Polyeder

$$H = \frac{1}{2}(H_1 + H_2).$$

(Die Halbsumme der Polyeder wird im gewöhnlichen Sinn von Brunn gefasst.)

Jeder Kant von H ist entweder die Halbsumme zweier Kante von H_1 und H_2, oder die Halbsumme eines Kantes des Einen und einer Ecke des Anderen. Im letzten Falle kann man die Ecke als Kant der Länge Nul erblicken. Dann entspricht jedem Kant von H ein Kant von H_1 und in anderer von H_2. Es sei der Kant von H mit Plus in dem Fall, wo der entsprechende Kant von H_1 länger als der von H_2 ist, und im Gegenteil mit Minus bezeichnet. Es folgt aus dem Lemma, dass im Falle, wo mindestens ein Kant

von H wirklich bezeichnet ist, ein Widerspruch mit dem Satz von Cauchy entsteht. Völglich sind die entsprechende Kante von H_1 und H_2 gleich, und die Seiten selbst gleich und parallel.

Ganz ebenso kann man den volgenden Satz beweisen:

Wenn alle Seiten zweier konvexen Polyeder paarweise parallele aussere Normale und gleiche Perimeter besetzen, so sind die Polyeder kongruent.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ n ЧИСЕЛ СУММАМИ ПОЛНЫХ ПЕРВЫХ, ВТОРЫХ, ... , n-ых СТЕПЕНЕЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Рассматривается вопрос об одновременном представлении заданных натуральных чисел суммами первых, вторых, ... , n-ых степеней неотрицательных чисел. Устанавливается асимптотическая формула для числа представлений и проводится исследование арифметического выражения, входящего в ее главный член.

ВВЕДЕНИЕ

Более 25 лет назад D. Hilbert поставил следующую задачу: исследовать, при каких условиях n заданных натуральных чисел $N_1, N_2, \ldots, N_n$ могут быть представлены суммами соответственно первых, вторых, ..., n-ых степеней одних и тех же целых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_s$, т. е. при каких условиях разрешима система диофантовых уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \ldots + x_s = N_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 = N_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_s^n = N_n. \end{array}\right\} \tag{1}$$

В 1921 г. E. Kamke [1] доказал существование натуральных чисел A_1; s_1; C и чисел $I_1 > 1, \ldots, I_{n-1} > 1$. $i_1 < 1, \ldots, i_{n-1} < 1$, обладающих тем свойством, что система (1) разрешима при

$$A_1 \mid N_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)^* \tag{2}$$

$$I_k N_n^{\frac{k}{n}} \leqslant N_k \leqslant i_k s^{1-\frac{k}{n}} N_n^{\frac{k}{n}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3}$$

$$N_n \geqslant C; \quad s \geqslant s_1. \tag{4}$$

В первой части настоящей работы методом акад. И. М. Виноградова [2] показывается, что при $n \geqslant 2$, $s \geqslant 2^{2n} \cdot n!\,(n+1)^3$ и вы-

* Нетрудно видеть, что условия $A_1 | N_k$ не являются необходимыми для разрешимости системы (1); в самом деле, если числа $N_1, \ldots, N_n$ представимы суммами полных степеней, то то же относится и к числам $N_1 + 1, \ldots, N_n + 1$.

Нетрудно видеть, что условия (9) являются также необходимыми для разрешимости системы (1) (см. § 14 части II).

Что касается условий (3), то заметим, что любые неотрицательные числа $x_1, \ldots, x_s$ удовлетворяют соотношениям

$$\left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^n\right)^{\frac{k}{n}} \leqslant \sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^k \leqslant s^{1-\frac{k}{n}} \left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^n\right)^{\frac{k}{n}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

так что для разрешимости (1) необходимо, чтобы

$$N_n^{\frac{k}{n}} \leqslant N_k \leqslant s^{1-\frac{k}{n}} N_n^{\frac{k}{n}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Следует отметить, что вопросом об одновременном представлении двух натуральных чисел суммами полных степеней занимался в 1929 г. акад. И. М. Виноградов [2], установивший асимптотическую формулу для числа решений системы

$$\left.\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + \ldots + x_s^n &= N, \\ x_1^m + x_2^m + \ldots + x_s^m &= M. \end{aligned}\right\}$$

Исследование особого ряда для этого случая было проведено мною в 1936 г. [3].

Вопросом об одновременном представлении двух чисел суммами полных n-ых и первых степеней занимался E. Kamke в 1923 г. [4].

Часть первая

1. Пусть $N_1 < N_2 < \ldots < N_n$ заданные натуральные числа. Введем обозначения

$$N_n = P^n, \tag{12}$$

$$N_k = h_k P^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{13}$$

(P—вещественное положительное). При этом предполагаем, что все h_k удовлетворяют условиям

$$I_k \leqslant h_k \leqslant i_k s^{1-\frac{k}{n}}. \tag{14}$$

Пусть, далее, натуральные числа $M_1, M_2, \ldots, M_n$ удовлетворяют неравенствам

$$M_k \leqslant N_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

В таком случае число $I(M_1, \ldots, M_n)$ решений системы диофантовых уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^k = M_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

полнении условий (3) число решений системы (1) выражается следующим образом:

$$I(N_1, N_2, \ldots, N_n) =$$
$$= B_1(h_1, \ldots, h_{n-1}) N_n^{\frac{s}{n} - \frac{n+1}{2}} \Big(\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n) + O(N_n^{-\frac{1}{4n^2}}) \Big), \tag{5}$$

где

$$B_1(h_1, \ldots, h_{n-1}) \geqslant B_0(n; s) > 0, \; N_k = h_k N_n^{\frac{k}{n}},$$

$$\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n) = \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_n=1}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_n). \tag{6}$$

$$A(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n} D^s e^{-2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} N_1 + \ldots + \frac{a_n}{q_n} N_n \right)}, \tag{7}$$

причем $a_1, \ldots, a_n$ пробегают приведенные системы вычетов соответственно по модулям $q_1, \ldots, q_n$,

$$D = \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} \sum_{r=0}^{q_1 q_2 \ldots q_n - 1} e^{2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} r \right)}. \tag{8}$$

Во второй части доказывается, что при $s \geqslant 2^{n^2-n-2} \cdot n^4$, $n \geqslant 2$ и выполнении условий

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \ldots & 2^n & N_n \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \ldots & 2^{n-1} & N_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n^2 & (n-1)^2 & \ldots & 2^2 & N_2 \\ n & n-1 & \ldots & 2 & N_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R, \\
\begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \ldots & N_n & 1^n \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \ldots & N_{n-1} & 1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n^2 & (n-1)^2 & \ldots & N_2 & 1^2 \\ n & n-1 & \ldots & N_1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R, \\
\ldots, \begin{vmatrix} N_n & (n-1)^n & \ldots & 2^n & 1^n \\ N_{n-1} & (n-1)^{n-1} & \ldots & 2^{n-1} & 1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_2 & (n-1)^2 & \ldots & 2^2 & 1^2 \\ N_1 & (n-1) & \ldots & 2 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R,
\end{array}\right\} \tag{9}$$

где

$$R = n!\,(n-1)! \ldots 2!\; 1!, \tag{10}$$

имеем

$$\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n) \geqslant C(n, s) > 0. \tag{11}$$

Из сопоставления этого результата с формулой (5) вытекает, что система (1) разрешима при выполнении условий (3) и (9), $N_n \geqslant B_2(n)$ и $s \geqslant 2^{n^4}$ (при $n \geqslant 10$).

представится, очевидно, следующим интегралом

$$I(M_1, \ldots, M_n) =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{x_1, \ldots, x_s=1}^{P} e^{2\pi i\alpha_n\left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^n - M_n\right) + \ldots + 2\pi i\alpha_1\left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu - M_1\right)} d\alpha_n \ldots d\alpha_1. \quad (16)$$

Будем считать, что

$$s \geqslant 2^{2n} \cdot n!\ (n+1)^3. \quad (17)$$

Полагая

$$T = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)}, \quad (18)$$

мы получим

$$I(M_1, \ldots, M_n) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 T^s e^{-2\pi i(\alpha_n M_n + \ldots + \alpha_1 M_1)} d\alpha_n \ldots d\alpha_1. \quad (19)$$

2. Рассмотрим числа

$$\lambda_k = \frac{1}{2^{k+2} \cdot k!n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (20)$$

и положим

$$\tau_k = P^{k-\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (21)$$

Из рассмотрения ряда дробей Фарея с знаменателями, не превосходящими τ_k, следует, что каждое α_k, лежащее между 0 и 1, можно представить в виде

$$\alpha_k = \frac{a_k}{q_k} + z_k, \quad (22)$$

где

$$(a_k, q_k) = 1, \quad 1 \leqslant q_k \leqslant \tau_k, \quad |z_k| \leqslant \frac{1}{q_k \tau_k}. \quad (23)$$

3. Для того чтобы получить главную часть выражения $I(M_1, \ldots, M_n)$, рассмотрим те $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, у которых соответствующие им $q_1, \ldots, q_n$ удовлетворяют условиям

$$q_k \leqslant P^{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad (24)$$

и возьмем сумму интегралов по параллелоидам

$$\frac{a_k}{q_k} - \frac{1}{\tau_k} \leqslant \zeta_k \leqslant \frac{a_k}{q_k} + \frac{1}{\tau_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

распространенную на все значения q_1, a_1; ...; q_n, a_n, удовлетворяющие (23) и (24). Преобразуем сумму (18), разбивая значения x на классы по модулю $q_1 q_2 \ldots q_n$; полагая при этом

$$x = q_1 q_2 \ldots q_n t + r,$$

получим

$$T = \sum_{r=0}^{q_1 q_2 \ldots q_n - 1} \sum_t \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} r^k + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k (q_1 q_2 \ldots q_n t + r)^k\right), \quad (25)$$

где

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{P - r}{q_1 q_2 \ldots q_n}.$$

Имеем далее

$$\sum_t e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k (q_1 q_2 \ldots q_n t + r)^k} =$$

$$= \int_0^{\frac{P}{q_1 q_2 \ldots q_n}} e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k q_1^k q_2^k \ldots q_n^k t^k} dt + O\left(1 + \sum_{k=1}^{n} |z_k| P^k\right),$$

$$\sum_t e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k (q_1 q_2 \ldots q_n t + r)^k} =$$

$$= \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} \int_0^P e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k t^k} dt + O\left(1 + \sum_{k=1}^{n} |z_k| P^k\right). \quad (26)$$

Введем обозначение

$$\rho = \int_0^P e^{2\pi i \sum z_k t^k} dt \qquad (\rho \ll P)\,^*, \quad (27)$$

тогда

$$T = \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} \cdot \rho \sum_{r=0}^{q_1 q_2 \ldots q_n - 1} e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} r^k} +$$

$$+ O\left(q_1 q_2 \ldots q_n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} |z_k| P^k\right)\right). \quad (28)$$

При

$$|z_k| \leqslant \frac{1}{\tau_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

имеем в виду (24) и (21)

$$T = D \cdot \rho + O\left(P^{2\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}\right), \quad (29)$$

где

$$D = \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} \sum_{r=0}^{q_1 q_2 \ldots q_n - 1} e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} r^k} \quad (30)$$

---

* Пусть $B > O$, тогда $A \ll B$ означает то же, что и $A = O(B)$.

Очевидно,

$$D \ll 1. \tag{31}$$

Далее имеем

$$T^s = D^s \rho^s + O\left(P^{s-1+2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_n}\right); \tag{32}$$

пусть

$$\delta = \frac{7}{8n}, \tag{33}$$

тогда при

$$N_k - N_k P^{-\delta} \leqslant M_k \leqslant N_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

имеем

$$e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} a_k M_k} = e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{q_k} M_k + z_k N_k\right)} + O\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k| P^{k-\delta}\right);$$

остаточный член в этом выражении $\ll P^{\lambda_1 - \delta}$; следовательно,

$$T^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} a_k M_k} = \rho^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k N_k} \cdot D^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} M_k} +$$

$$+ O\left(P^{s+\lambda_1-\delta} + P^{s-1+2\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\right).$$

Считая a_k, q_k постоянными и интегрируя в пределах

$$-\frac{1}{\tau_k} \leqslant z_k \leqslant \frac{1}{\tau_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

получим

$$Q \cdot D^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} M_k} +$$

$$+ O\left(P^{s - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \left(P^{\lambda_1 - \delta} + P^{-1+2\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\right)\right), \tag{34}$$

где

$$Q = \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{\frac{1}{\tau_1}} \int_{-\frac{1}{\tau_2}}^{\frac{1}{\tau_2}} \cdots \int_{-\frac{1}{\tau_n}}^{\frac{1}{\tau_n}} \rho^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k N_k} dz_n \ldots dz_2 dz_1. \tag{35}$$

Заметим при этом, что, очевидно, равенство (19) можно переписать в следующем виде:

$$I(M_1, \ldots, M_n) = \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{1-\frac{1}{\tau_1}} \int_{-\frac{1}{\tau_2}}^{1-\frac{1}{\tau_2}} \cdots \int_{-\frac{1}{\tau_n}}^{1-\frac{1}{\tau_n}} T^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k M_k} d\alpha_n \ldots d\alpha_2 d\alpha_1.$$

Суммируя (34) на все q_k, a_k с $1 \leqslant q_k \leqslant P^{\lambda_k}$ и $0 \leqslant a_k < q_k$, $(a_k, q_k) = 1$ (при $k = 1, 2, \ldots, n$), получим

$$I_1(M_1, \ldots, M_n) = Q \sum_{q_1, a_1; \ldots; q_n, a_n} D^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} M_k} +$$

$$+ O\left(P^{s - \frac{n(n+1)}{2} + 3\sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \lambda_1 - 2} + P^{s - \frac{n(n+1)}{2} + 4\sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \lambda_1 - 1}\right). \quad (36)$$

В силу равенств (20) и (33) и соотношения (17) имеем

$$\bar{I}(M_1, \ldots, M_n) = Q \sum_{q_1, a_1; \ldots; q_n, a_n} D^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} M_k} + O\left(P^{s - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4n}}\right). \quad (37)$$

Полагая

$$A(q_1, \ldots, q_n; s; M_1, \ldots, M_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n} D^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} M_k}, \quad (38)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пробегают приведенные системы вычетов соответственно по модулям $q_1, q_2, \ldots, q_n$, мы имеем, следовательно,

$$\bar{I} = Q \sum_{q_1=1}^{P^{\lambda_1}} \sum_{q_2=1}^{P^{\lambda_2}} \ldots \sum_{q_n=1}^{P^{\lambda_n}} A(q_1, q_2, \ldots, q_n) + O\left(P^{s - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4n}}\right). \quad (39)$$

Далее мы покажем, что оставшаяся часть интеграла (16) будет $\ll P^{s - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4n}}$; для этого мы установим, что интеграл от модуля нашей подинтегральной функции, распространенный на оставшуюся область (даже несколько расширенную), будет $\ll P^{s - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4n}}$.

4. Рассмотрим те $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, у которых соответствующие им согласно (22) $q_1, \ldots, q_n$ таковы, что

$$q_n > P^{\lambda_n}, \quad q_{n-1} \leqslant P^{n-1-\lambda_{n-1}}, \ldots, q_1 \leqslant P^{1-\lambda_1}.$$

Воспользуемся следующей леммой ([5]):

Пусть $P > 1$, $n > 1$, $f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}$, $\alpha_n, \ldots, \alpha_0$ — *вещественные*, $\left|\alpha_n - \frac{a}{q}\right| < \frac{\tau}{q^2}$; $(a, q) = 1$, $0 < q \leqslant P^n$, $1 \leqslant \tau \leqslant q$; *тогда*

$$S \ll P^{1+\varepsilon}(1 + qP^{-n+1})^{\sigma_n}(\tau q^{-1} + P^{-1})^{\sigma_n},$$

где $\sigma_n = 2^{-n+1}$ *и* ε *произвольно малое положительное постоянное.*

Взяв $\tau = 1$, мы получаем для суммы (18)

$$T = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)}$$

следующую оценку:

$$T \ll P^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{q_n} + \frac{1}{P} + \frac{q_n}{P^n} \right)^{\sigma_n},$$

откуда

$$|T|^s \ll P^{s+s\varepsilon - \lambda_n \sigma_n s}.$$

Сумма длин всех интервалов, отвечающих данному q_n, будет $< q_n \cdot \frac{2}{q_n \tau_n} = 2P^{-n+\lambda_n}$; часть интеграла модуля, соответствующая данному q_n, будет $\ll P^{s-n+\lambda_n+s\varepsilon-\lambda_n\sigma_n s}$, суммируя же эти части по q_n, получим выражение $\ll P^{s+s\varepsilon-\lambda_n\sigma_n s}$. При достаточно малом ε это выражение будет $\ll P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4n}}$.

5. Рассмотрим, далее, те $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, у которых отвечающие им $q_1, \ldots, q_n$ таковы, что

$$q_\nu \leqslant P^{\lambda_\nu} \quad (\nu = k+1, \ldots n),$$
$$q_k \geqslant P^{\lambda_k},$$

причем

$$q_{k-1}, q_{k-2}, \ldots \text{— любые} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Преобразуем теперь сумму (18), полагая $x = q_n \ldots q_{k+1}\zeta + r$; тогда

$$T = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} = \sum_{r=0}^{q_n \ldots q_{k+1} - 1} S_r,$$

где

$$S_r = \sum_{0 \leqslant \zeta \leqslant \left[\frac{P-r}{q_n \ldots q_{k+1}}\right]} \exp\left(2\pi i \alpha_n (q_n \ldots q_{k+1}\zeta + r)^n + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + 2\pi i \alpha_1 (q_n \ldots q_{k+1}\zeta + r)\right), \tag{40}$$

$$S_r = \sum_{\zeta} \exp\left(2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} r^{k+1} + z_n (q_n \ldots q_{k+1}\zeta + r)^n + \ldots \right.\right.$$
$$\ldots + z_{k+1} (q_n \ldots q_{k+1}\zeta + r)^{k+1} + \alpha_k (q_n \ldots q_{k+1}\zeta + r)^k + \ldots$$
$$\left.\left. \ldots + \alpha_1 (q_n \ldots q_{k+1}\zeta + r)\right)\right).$$

Полагая

$$t_k = [P^{\nu_k}], \tag{41}$$

где

$$\nu_k = 1 - \frac{3\lambda_k}{4k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{42}$$

и $\zeta = \beta t_k + y$, разобьем S_r на суммы с промежутком суммирования

длиной t_k (кроме последней, возможно). Каждая из них приведется к виду

$$U_{r\beta} = \sum_{y=0}^{k-1} \exp\Big(2\pi i\Big(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} r^{k+1} + \\ + z_n (q_n \ldots q_{k+1}\beta t_k + q_n \ldots q_{k+1} y + r)^n + \ldots \\ \ldots + z_{k+1} (q_n \ldots q_{k+1}\beta t_k + q_n \ldots q_{k+1} y + r)^{k+1} + \\ + \alpha_k (q_n \ldots q_{k+1}\beta t_k + q_n \ldots q_{k+1} y + r)^k + \ldots \\ \ldots + \alpha_1 (q_n \ldots q_{k+1}\beta t_k + q_n \ldots q_{k+1} y + r)\Big)\Big) \quad (43)$$

$$U_{r\beta} = \sum_{y=0}^{t_k-1} \exp\Big(2\pi i\ (\alpha_k q_n^k \ldots q_{k+1}^k y^k + \bar{\alpha}_{k-1} y^{k-1} + \ldots + \bar{\alpha}_0)\Big) + \\ + O(|z_n| P^{n-k} q_n^k \ldots q_{k+1}^k t_k^{k+1} + \ldots + |z_{k+1}| P q_n^k \ldots q_{k+1}^k t_k^{k+1}),$$

где $\bar{\alpha}_0, \ldots, \bar{\alpha}_{k-1}$ — некоторые вещественные постоянные. Для применения леммы § 4 при $k = 2, 3, \ldots, n-1$ заметим, что

$$\alpha_k q_n^k \ldots q_{k+1}^k = \frac{a_k}{q_k} q_n^k \ldots q_{k+1}^k + \frac{\theta_k q_n^k \ldots q_{k+1}^k}{q_k P^{k-\lambda_k}} = \frac{a_k q_k'}{q_k''} + \frac{\theta_k q_k'}{q_k'' P^{k-\lambda_k}}, \quad (44)$$

где

$$0 \leqslant \theta_k \leqslant 1, \quad (q_k', q_k'') = 1,$$
$$q_k P^{-k(\lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1})} < q_k'' < P^{k-\lambda_k};$$

следовательно,

$$U_{r\beta} \ll t_k^{1+\varepsilon_1} \left(\frac{1}{t_k} + \frac{q_k''}{t_k^k} + \frac{q_k'}{q_k''} + \frac{q_k'}{t_k^{k-1}}\right)^{\sigma_k} + \\ + q_n^k \ldots q_{k+1}^k t_k^{k+1} (|z_n| P^{n-k} + \ldots + |z_{k+1}| P),$$

где $\sigma_k = 2^{-k+1}$,

$$T \ll P^{1+\varepsilon_2} (P^{-\nu_k} + P^{k(1-\nu_k)-\lambda_k} + P^{2k(\lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1}) - \lambda_k} + \\ + P^{k(\lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1} - \nu_k) + \nu_k})^{\sigma_k} + t_k q_n q_{n-1} \ldots q_{k+1} + \\ + P^{\lambda_k - k} q_n^k \ldots q_{k+1}^k t_k^k (P^{\lambda_n} + P^{\lambda_{n-1}} + \ldots + P^{\lambda_{k+1}}),$$

$$|T|^s \ll P^{s+s\varepsilon_2} (P^{-\nu_k s \sigma_k} + P^{s(k(1-\nu_k)-\lambda_k)\sigma_k} + P^{2ks(\lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1})\sigma_k - \lambda_k s \sigma_k} + \\ + P^{s\sigma_k(k(\lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1} - \nu_k) + \nu_k)}) + P^{(\nu_k + \lambda_n + \lambda_{n-1} + \ldots + \lambda_{k+1})s} + \\ + P^{s(1-k) + k(\lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1} + \nu_k)s + \lambda_{k+1} s}.$$

При $k = 1$ имеем

$$|T|^s \ll P^{s - s\nu_1} \cdot P^{s(1-\lambda_1)} + P^{(\nu_1 + \lambda_n + \lambda_{n-1} + \ldots + \lambda_2)s} + \\ + P^{(\lambda_n + \ldots + \lambda_2 + \nu_1)s + \lambda_2 s}$$

Рассматривая сумму интегралов модуля по параллелоидам, ребра которых параллельны координатным осям и имеют длины соответственно $\frac{2}{q_1 \tau_1}, \ldots, \frac{2}{q_n \tau_n}$, а центры лежат в точках $\left(\frac{a_1}{q_1}, \ldots, \frac{a_n}{q_n}\right)$, получим выражение

$$\ll P^{2(\lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1}) - (n + \ldots + (k+1))} \cdot \max |T|^s;$$

при достаточно малых значениях ε_2 оно будет $\ll P^{s - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4n}}$.

6. Итак, из равенства (39) и результатов § 4 и 5 следует, что

$$I(M_1, \ldots, M_n) = Q \sum_{1 \leqslant q_1 \leqslant P^{\lambda_1}} \cdots \sum_{1 \leqslant q_n \leqslant P^{\lambda_n}} A(q_1, \ldots, q_n) + O\left(P^{s - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4n}}\right). \quad (45)$$

Нетрудно видеть, что при рассматриваемых нами значениях s ряд

$$\mathfrak{S} = \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_n=1}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_n) \quad (46)$$

сходится абсолютно и что

$$\left| \mathfrak{S} - \sum_{q_1=1}^{P^{\lambda_1}} \cdots \sum_{q_n=1}^{P^{\lambda_n}} A(q_1, \ldots, q_n) \right| \ll \frac{1}{P}. \quad (47)$$

Так как в виду (27), (35), (21) и (20)

$$Q \ll P^{s - \frac{n(n+1)}{2} + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n},$$

то согласно (45)

$$I(M_1, \ldots, M_n) = Q\mathfrak{S} + O\left(P^{s - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4n}}\right). \quad (48)$$

7. Займемся теперь вычислением Q; для этого просуммируем правую часть (45) по всем $M_1, \ldots, M_n$, удовлетворяющим неравенствам

$$N_k - N_k P^{-\delta} \leqslant M_k \leqslant N_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (49)$$

Суммируя слагаемые, содержащие $A(1, 1, \ldots, 1; s; M_1, \ldots, M_n)$ и принимая во внимание, что $A(1, 1, \ldots, 1, s; M_1, \ldots, M_n) = 1$, получим

$$QN_1N_2 \ldots N_n P^{-n\delta} + O\left(|Q| \sum_{k=1}^{n} \frac{N_1 N_2 \ldots N_n}{N_k} P^{-n\delta}\right).$$

Далее, суммируя по $q_1 \geqslant 2$ слагаемые с $A(q_1, 1, \ldots, 1; s; M_1, \ldots, M_n)$ при данных $M_1, M_2, \ldots, M_n$, согласно (38) получим

$$Q \sum_{q_1=2}^{P^{\lambda_1}} \sum_{a_1} D^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} M_k}.$$

Суммируя по M_1, получим следующую оценку:

$$\left| Q \sum_{q_1=2}^{P^{\lambda_1}} \sum_{a_1} D^s \sum_{M_1} e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} M_k} \right| \leqslant |Q| \cdot \sum_{q_1=2}^{P^{\lambda_1}} \sum_{a_1} \left| \sum_{M_1} e^{-2\pi i \frac{a_1}{q_1} M_1} \right| \ll$$

$$\ll |Q| \cdot \sum_{q_1=2}^{P^{\lambda_1}} q_1 \lg q_1 \ll |Q| \cdot P^{2\lambda_1 + \varepsilon_3}.$$

Суммируя далее по $M_2, M_3, \ldots, M_n$, получим в этом случае выражение

$$\ll |Q| \cdot N_2 N_3 \ldots N_n \cdot P^{-(n-1)\delta+2\lambda_1+\varepsilon_3}.$$

Суммируя аналогично члены с $A(q_1, q_2, 1, \ldots, 1; s; M_1, M_2, \ldots, M_n), \ldots, A(q_1, q_2, \ldots, q_n; s; M_1, M_2, \ldots, M_n)$ и принимая во внимание остаточные члены формулы (45), мы окончательно получим (при достаточно малых значениях $\varepsilon_3, \ldots$)

$$\sum_{M_1, \ldots, M_n} I(M_1, \ldots, M_n) = QN_1 \ldots N_n P^{-n\delta} + O(P^{s-\frac{1}{4n}-n\delta}). \qquad (50)$$

Суммирование здесь распространено на значения $M_1, \ldots, M_n$, удовлетворяющие неравенствам (49).

С другой стороны, $\sum\limits_{M_1, \ldots, M_n} I(M_1, \ldots, M_n)$ представляет число решений в целых неотрицательных числах $x_1, \ldots, x_s$ системы неравенств

$$N_k(1 - P^{-\delta}) \leqslant x_1^k + \ldots + x_s^k \leqslant N_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (51)$$

Так как (см. § 1)

$$N_n = P^n,$$

$$\left.\begin{array}{l} N_{\nu} = h_{\nu} P^{\nu} \\ I_k \leqslant h_k \leqslant i_k s^{1-\frac{k}{n}} \end{array}\right\} (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

то

$$\sum_{M_1, \ldots, M_n} I(M_1, \ldots, M_n) = P^s \int\int_{(V)} \ldots \int d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_s + O(P^{s-1-\delta}), \quad (52)$$

где интеграл распространен на область (V) одновременного выполнения неравенств

$$\left.\begin{array}{c} 1 - P^{-\delta} \leqslant \xi_1^n + \xi_2^n + \ldots + \xi_s^n \leqslant 1, \\ h_{n-1}(1 - P^{-\delta}) \leqslant \xi_1^{n-1} + \xi_2^{n-1} + \ldots + \xi_s^{n-1} \leqslant h_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_1(1 - P^{-\delta}) \leqslant \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_s \leqslant h_1. \end{array}\right\}$$

Нетрудно показать, что

$$\int\int_{(V)} \ldots \int d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_s = B(h_1, \ldots, h_{n-1}) P^{-n\delta} + O(P^{-(n+1)\delta}), \qquad (53)$$

где

$$B(h_1, \ldots, h_{n-1}) \geqslant B_0'(n; s) > 0. \qquad (54)$$

Из равенств (50), (52) и (53) мы получаем таким образом

$$QN_1 N_2 \ldots N_n P^{-n\delta} = B(h_1, \ldots, h_{n-1}) P^{s-n\delta} + O(P^{s-n\delta-\frac{1}{4n}})$$

или в силу (12) и (13)

$$Q = \frac{B(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})}{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} P^{s-\frac{n(n+1)}{2}} + O(P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4n}}).$$

8. Пользуясь равенством (48), мы имеем, следовательно,

$$I(M_1, M_2, \ldots, M_n) = \Big(\frac{B(h_1, \ldots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} P^{s-\frac{n(n+1)}{2}} +$$

$$+ O\big(P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4n}}\big)\Big)\mathfrak{S}(M_1, \ldots, M_n) + O\big(P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4n}}\big);$$

откуда, окончательно, при $M_k = N_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, пользуясь (12), находим, что

$$I(N_1, N_2, \ldots, N_n) =$$

$$= \frac{B(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} N_n^{\frac{s}{n}-\frac{n+1}{2}} \Big(\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n) + O\big(N_n^{-\frac{1}{4n^2}}\big)\Big), \tag{55}$$

где $B(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})$ удовлетворяет условию (54) и h_k — условиям (14).

Часть вторая

1. Рассмотрим особый ряд

$$\mathfrak{S} = \sum_{q_1, \ldots, q_n = 1}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_n), \tag{56}$$

где $A(q_1, \ldots, q_n) = A(q_1, \ldots, q_n; s; N_1, \ldots, N_n)$.

Целью дальнейшего исследования является показать, что при выполнении условий (9) $\mathfrak{S}$ превосходит некоторую положительную константу (независящую от выбора $N_1, \ldots, N_n$) при $s \geqslant 2^{n^2}$.

2. Обозначим через $W(\mu)$ число решений системы сравнений

$$\left.\begin{array}{l} h_1^n + h_2^n + \ldots + h_s^n \equiv N_n \pmod{\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1 + h_2 + \ldots + h_s \equiv N_1 \pmod{\mu}, \end{array}\right\} \tag{57}$$

$$1 \leqslant h_\nu \leqslant \mu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s) \tag{58}$$

и покажем, что

$$\sum_{q_1/\mu} \sum_{q_2/\mu} \cdots \sum_{q_n/\mu} A(q_1, \ldots, q_n) = \mu^{-(s-n)} W(\mu).$$

В самом деле, согласно (30) и (38)

$$\sum_{q_1/\mu} \cdots \sum_{q_n/\mu} A(q_1, q_2, \ldots, q_n) =$$

$$= \sum_{q_1, a_1; \ldots; q_n, a_n} e^{-2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} N_n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} N_1\right)} \frac{1}{(q_1 \ldots q_n)^s} \Big(\sum_{h=1}^{q_1, q_2, \ldots, q_n} e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} h^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} h\right)}\Big)^s =$$

$$= \mu^{-ns} \sum_{q_1, a_1; \ldots; q_n, a_n} e^{-2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} N_n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} N_1\right)} \Big(\sum_{h=1}^{\mu^n} e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} h^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} h\right)}\Big)^s =$$

$$= \mu^{-ns} \sum_{h_1, \ldots, h_s = 1}^{\mu^n} \sum_{q_1, a_1; \ldots; q_n, a_n} e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}(h_1^n + \ldots + h_s^n - N_n) + \ldots + \frac{a_1}{q_1}(h_1 + h_2 + \ldots + h_s - N_1)\right)};$$

если $h_1, h_2, \ldots, h_s$ таковы, что имеет место система сравнений (57), то

$$e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}(h_1^n+\ldots+h_s^n-N_n)+\ldots+\frac{a_1}{q_1}(h_1+\ldots+h_s-N_1)\right)}=1$$

и суммируя по $q_1, a_1; \ldots; q_n, a_n$, получим

$$\sum_{q_1/\mu}\varphi(q_1)\ldots\sum_{q_n/\mu}\varphi(q_n)=\mu^n$$

слагаемых, равных единице; если же, например,

$$h_1^n+\ldots+h_s^n \not\equiv N_n \pmod{\mu},$$

то

$$\sum_{q_n, a_n} e^{2\pi i\frac{a_n}{q_n}(h_1^n+\ldots+h_s^n-N_n)}=0.$$

Поэтому

$$\sum_{q_1/\mu_1}\ldots\sum_{q_n/\mu_n}A(q_1,\ldots,q_n)=\mu^{-ns}\cdot\mu^n\cdot\mu^{(n-1)s}W(\mu),$$

что и требовалось доказать.

В частности, обозначая через $p_1, p_2, \ldots, p_l, p$ простые числа, имеем

$$\sum_{q_1/p_1^l\ldots p_l^l}\ldots\sum_{q_n/p_1^l\ldots p_l^l}A(q_1,\ldots,q_n)=(p_1\ldots p_l)^{-l(s-n)}W(p_1^l\ldots p_l^l), \quad (59)$$

$$\sum_{q_1/p^l}\ldots\sum_{q_n/p^l}A(q_1,\ldots,q_n)=p^{-l(s-n)}W(p^l). \quad (60)$$

3. Покажем теперь, что

$$W(p_1^l\ldots p_l^l)=W(p_1^l)\ldots W(p_l^l). \quad (61)$$

Действительно, пусть имеется некоторое решение $(h_1, \ldots, h_s)$ системы

$$\left.\begin{array}{l} h_1^n+h_2^n+\ldots+h_s^n\equiv N_n \pmod{p_1^l},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ h_1+h_2+\ldots+h_s\equiv N_1 \pmod{p_1^l},\end{array}\right\}$$
$$1\leqslant h_\nu\leqslant p_1^l \qquad (\nu=1,2,\ldots,s),$$

а также некоторое решение $(h_1', \ldots, h_s')$ системы

$$\left.\begin{array}{l} h_1'^n+h_2'^n+\ldots+h_s'^n\equiv N_n \pmod{p_2^l},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ h_1'+h_2'+\ldots+h_s'\equiv N_1 \pmod{p_2^l},\end{array}\right\}$$
$$1\leqslant h_\nu'\leqslant p_2^l \qquad (\nu=1,2,\ldots,s).$$

Подберем t_ν, t_ν' так, чтобы

$$h_\nu+t_\nu p_1^l=h_\nu'+t_\nu' p_2^l,$$

т. е. чтобы

$$p_1^l t_\nu\equiv h_\nu'-h_\nu \pmod{p_2^l}.$$

Возьмем теперь

$$h''_\nu \equiv h_\nu + t_\nu p_1^l \pmod{p_1^l p_2^l},\ 1 \leqslant h''_\nu \leqslant p_1^l p_2^l \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s),$$

тогда

$$h_1''^k + h_2''^k + \ldots + h_s''^k \equiv N_k \pmod{p_1^l p_2^l} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Обратно, элементы каждой определенной системы $(h''_1, \ldots, h''_s)$, $1 \leqslant h''_\nu \leqslant p_1^l p_2^l$ удовлетворяют сравнениям

$$h''_\nu \equiv h_\nu^{(1)} \pmod{p_1^l},$$
$$h''_\nu \equiv h_\nu^{(2)} \pmod{p_2^l},$$

где

$$1 \leqslant h_\nu^{(1)} \leqslant p_1^l, \quad 1 \leqslant h_\nu^{(2)} \leqslant p_2^l.$$

Таким образом

$$W(p_1^l p_2^l) = W(p_1^l) \cdot W(p_2^l).$$

Совершенно так же получаем и равенство (61).

4. Из (60) и (61) вытекает, что

$$\sum_{q_1/p_1^l \ldots p_l^l} \cdots \sum_{q_n/p_1^l \ldots p_l^l} A(q_1, \ldots, q_n) = \prod_{k=1}^{l} \Big(\sum_{q_1/p_k^l} \cdots \sum_{q_n/p_k^l} A(q_1, \ldots, q_n) \Big). \quad (62)$$

Если под p_k мы будем подразумевать k-ое простое число, то ввиду абсолютной сходимости ряда (56) из (62) следует, что

$$\mathfrak{S} = \lim_{l \to \infty} \prod_{k=1}^{l} \Big(\sum_{q_1/p_k^l} \cdots \sum_{q_n/p_k^l} A(q_1, \ldots, q_n) \Big). \quad (63)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{q_1/p_k^l} \cdots \sum_{q_n/p_k^l} A(q_1, \ldots, q_n) \geqslant 1 - C p_k^{-2}, \quad (64)$$

где C—постоянная, зависящая лишь от n и s. Для того чтобы убедиться в том, что в рассматриваемом нами случае $\mathfrak{S}$ превосходит некоторую положительную постоянную, надо найти оценку для $\sum_{q_1/p_k^l} \cdots \sum_{q_n/p_k^l} A(q_1, \ldots, q_n)$ при «малых» значениях p_k (т. е. таких, при которых $C p_k^{-2} \geqslant 1$). Мы покажем, что при достаточно большом l

$$\sum_{q_1/p_k^l} \cdots \sum_{q_n/p_k^l} A(q_1, \ldots, q_n) \geqslant p_k^{-m(s-n)}, \quad (65)$$

где m—некоторое натуральное число, зависящее от n и p_k.

Тогда неравенство

$$\mathfrak{S} \geqslant C_1(n, s) > 0 \quad (66)$$

будет непосредственно вытекать из соотношений (63), (64) и (65), так как

$$\mathfrak{S} \geqslant \prod_{k=1}^{\infty} \max\left(p_k^{-m(s-n)}, 1 - Cp_k^{-2}\right). \tag{67}$$

Из (60) следует, что для доказательства (65), а следовательно, и (66), достаточно установить, что при некотором натуральном $m = m(n, p)$ и достаточно большом l

$$W(p^l) \geqslant p^{(s-n)(l-m)}. \tag{68}$$

5. Пусть p простое, $\Theta = \Theta(p, n)$ представляет степень, в которой p входит в детерминант

$$D = \begin{vmatrix} n^{n-1} & \ldots & 2^{n-1} & 1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & \ldots & 2 & 1 \\ n^0 & \ldots & 2^0 & 1^0 \end{vmatrix}, \tag{69}$$

т. е. p^Θ / D, $p^{\Theta+1} \not/ D$; очевидно при $p \geqslant n$ имеем $\Theta = 0$.

Пусть, далее, Θ_k представляет степень, в которой p входит в k:

$$p^{\Theta_k} / k, \quad p^{\Theta_k+1} \not/ k;$$
$$k = p^{\Theta_k} \cdot k_0,$$
$$\Theta_0 = \max(\Theta_1, \ldots, \Theta_n).$$

Через $W_1(p^l)$ обозначим число решений системы

$$\left.\begin{array}{l} y_1^n + \ldots + y_s^n \equiv N_n \pmod{p^l} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1 + \ldots + y_s \equiv N_1 \pmod{p^l} \end{array}\right\} \tag{70}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \leqslant y_\nu \leqslant p^l & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ 1 \leqslant y_\mu \leqslant p^{l-\Theta-\Theta_0} & (\mu = n+1, \ldots, s), \end{array}\right\} \tag{71}$$

обладающих тем свойством, что

$$p^\Theta / \begin{vmatrix} y_n^{n-1} & \ldots & y_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^0 & \ldots & y_1^0 \end{vmatrix}, \quad p^{\Theta+1} \not/ \begin{vmatrix} y_n^{n-1} & \ldots & y_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^0 & \ldots & y_1^0 \end{vmatrix} \tag{72}$$

6. В дальнейшем нам придется пользоваться следующей очевидной леммой:

Дана система сравнений

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\beta \equiv b_\alpha \pmod{p^l} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \tag{73}$$

пусть при $\lambda \geqslant 0$

$$p^\lambda / \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad p^{\lambda+1} \not/ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Система (73) *разрешима, если*

$$p^\lambda \Big/ \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ b_n a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad p^\lambda \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} b_2 \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, p^\lambda \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots b_1 \\ a_{21} a_{22} \dots b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots b_n \end{vmatrix}$$

7. Покажем, что *при* $p > n$, $s \geqslant np$ *имеем* $W_1(p) \geqslant 1$.

Действительно, рассмотрим систему сравнений

$$x_1 \cdot n^k + x_2 (n-1)^k \dots + x_n \cdot 1^k \equiv N_k \pmod p \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (74)$$

Так как детерминант этой системы

$$\begin{vmatrix} n^n & \dots & 1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ n & \dots & 1 \end{vmatrix} = n!\,(n-1)! \dots 2!\,1!$$

не делится на p, то согласно приведенной лемме система эта разрешима. Условия (72) будут удовлетворены, так как мы можем взять $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, ..., $y_n = n$. В виду того что значения x_ν мы можем брать между 1 и p, число слагаемых в (74) будет во всяком случае не больше, чем np, что и требовалось доказать.

8. Покажем теперь, что *система сравнений*

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_s^k \equiv M_k \pmod p \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (75)$$

разрешима при $s \geqslant n^3$, $p \geqslant n^{\frac{n}{2}+2} + 1$.

Действительно, рассмотрим сумму

$$S = \sum_{h_1, h_2, \dots, h_n = 0}^{p-1} \; \sum_{x_1, \dots, x_s = 0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{h_n \left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^n - M_n\right) + \dots + h_1 \left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu - M_1\right)}{p}}; \quad (76)$$

тогда, как нетрудно видеть,

$$S = p^n \cdot \overline{W}(p), \quad (77)$$

где $\overline{W}(p)$ представляет число решений системы (75).

С другой стороны,

$$S = p^s + \sum_{h_1, h_2, \dots, h_n}{}' \; \sum_{x_1, \dots, x_s = 0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{h_n \left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^n - M_n\right) + \dots + h_1 \left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu - M_1\right)}{p}}, \quad (78)$$

где Σ' распространена на все значения $h_1, \dots, h_n$, лежащие между 0 и $p-1$, за исключением случая, когда все h обращаются в нуль.

Очевидно

$$S = p^s + \sum_{h_1, h_2, \dots, h_n}{}' e^{-2\pi i (h_n M_n + \dots + h_1 M_1)} \left(\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{h_n x^n + \dots + h_1 x}{p}} \right)^s. \quad (79)$$

Согласно оценке Mordell'я (6), при $h_n \not\equiv 0 \pmod p$

$$\left|\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{h_n x^n + \ldots + h_1 x}{p}}\right| \leqslant n^{\frac{1}{2}} (n,\ p-1)^{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{p}{(p(p-1))^{\frac{1}{2n}}}$$

и, следовательно,

$$\left|\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{h_n x^n + \ldots + h_1 x}{p}}\right| \leqslant n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} \cdot \frac{p^{1-\frac{1}{2n}}}{(p-1)^{\frac{1}{2n}}}, \qquad (80)$$

причем последняя оценка справедлива также в случае, когда одновременно

$$h_n \equiv 0 \pmod p,\ h_{n-1} \equiv 0 \pmod p, \ldots,\ h_\mu \equiv 0 \pmod p \quad (\mu > 1).$$

Равенства (77) и (79) дают нам, в виду (80),

$$p^n \cdot \overline{W}(p) = p^s + (p^n - 1) \cdot \xi \cdot n^{\frac{s}{2}+\frac{s}{2n}} \cdot \frac{p^{s-\frac{s}{2n}}}{(p-1)^{\frac{s}{2n}}},$$

где $|\xi|$ лежит между 0 и 1.

При $s \geqslant n^3$ и $p \geqslant n^{\frac{n}{2}+2} + 1$ выражение в правой части этого равенства будет > 0 и, следовательно, $\overline{W}(p) \geqslant 1$.

9. *При* $s \geqslant n^3 + n$, $p \geqslant n^{\frac{n}{2}+2} + 1$ *имеем* $W_1(p) \geqslant 1$.

Действительно, согласно § 9 при указанных значениях p и $s \geqslant n^3$ разрешима система

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k \equiv N_k - 1^k - 2^k - \ldots - n^k \pmod p,$$

т. е. система

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k + x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k \equiv N_k \pmod p.$$

Так как теперь условия (72) выполнены, то действительно в нашем случае $W_1(p) \geqslant 1$.

10. *Если* $s \geqslant np^l$, *то при выполнении условий*

$$\begin{vmatrix} N_n & (n-1)^n & \ldots & 1^n \\ N_{n-1} & (n-1)^{n-1} & \ldots & 1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_1 & n-1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R, \ldots$$

$$\ldots, \begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \ldots & N_n \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \ldots & N_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n-1 & \ldots & N_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R, \qquad (81)$$

где

$$R = \begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \dots & 1^n \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \dots & 1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \qquad (82)$$

имеем $W_1(p^l) \geqslant 1$ *при любом натуральном* l, *удовлетворяющем условию* $p^l \geqslant np^{\Theta_0+\Theta}$.

Действительно, система сравнений

$$x_1 \cdot n^k + x_2 \cdot (n-1)^k + \dots + x_n \cdot 1^k \equiv N_k \pmod{p^l} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (83)$$

имеет детерминант, равный R. Пусть p^λ / R, $p^{\lambda+1} \not/ R$, тогда в виду (81) и леммы § 6 система (83) разрешима, что и доказывает справедливость нашего утверждения, так как за $y_1, \dots, y_n$ мы можем взять числа $1, 2, \dots, n$; условие же $y_\mu \leqslant p^{l-\Theta-\Theta_0}$ будет выполнено.

11. *Если*

$$W_1(p^l) \geqslant 1 \text{ и } l \geqslant m,$$

где

$$m = 2\Theta + 2\Theta_0 + 1,$$

то при любом натуральном u

$$W_1(p^{l+u}) \geqslant p^{(s-n)u}.$$

Действительно, пусть $(y_1, \dots, y_s)$ некоторое решение системы

$$\sum_{\nu=1}^{s} y_\nu^k \equiv N_k \pmod{p^l} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \qquad (84)$$

удовлетворяющее условиям (70) и (71).

Возьмем произвольные целые числа $z_{n+1}, \dots, z_s$, удовлетворяющие соотношениям

$$0 \leqslant z_\mu < p \quad (\mu = n+1, \dots, s),$$

и определим $z_1, \dots, z_n$ так, чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{s} k_0 y_\nu^{k-1} z_\nu \equiv \frac{N_k - \sum_{\nu=1}^{s} y_\nu^k}{p^{l-\Theta_0+\Theta_k-\Theta}} \equiv \overline{N}_k \pmod{p^{\Theta_0+\Theta+1}} \quad (k=1, 2, \dots, n), \qquad (85)$$

где k_0, Θ_k, Θ_0, Θ имеют значения, указанные в § 5.

Детерминант D_0 этой системы, очевидно, выражается так:

$$D_0 = n_0 (n-1)_0 \dots 1_0 \begin{vmatrix} y_1^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^0 & \dots & y_n^0 \end{vmatrix}.$$

Согласно нашим условиям

$$p^\Theta / D_0, \quad p^{\Theta+1} \not/ D_0.$$

Поэтому, в виду леммы § 6, система (85) разрешима, и при определенных по модулю $p^{\Theta_0+\Theta+1}$ значениях $z_1, \ldots, z_n$ мы имеем

$$\sum_{\nu=1}^{s} kp^{l-\Theta_0-\Theta} y_\nu^{k-1} z_\nu \equiv N_k - \sum_{\nu=}^{s} y_\nu^k \pmod{p^{l+\Theta_k+1}} \quad (k=1, \ldots, n),$$

следовательно, à fortiori

$$\sum_{\nu=1}^{s} kp^{l-\Theta_0-\Theta} y_\nu^{k-1} z_\nu \equiv N_k - \sum_{\nu=1}^{s} y_\nu^k \pmod{p^{l+1}}.$$

Полагая теперь

$$h_\nu = y_\nu + z_\nu p^{l-\Theta_0-\Theta} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s), \tag{86}$$

при $l > \Theta_0 + \Theta$ имеем

$$h_\nu^k \equiv y_\nu^k + ky_\nu^{k-1} z_\nu p^{l-\Theta_0-\Theta} \pmod{p^{2l-2\Theta_0-2\Theta}};$$

следовательно, при $l \geqslant 2\Theta_0 + 2\Theta + 1$

$$\sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k \equiv \sum_{\nu=1}^{s} y_\nu^k + \sum_{\nu=1}^{s} ky_\nu^{k-1} z_\nu p^{l-\Theta_0-\Theta} \equiv N_k \pmod{p^{l+1}}.$$

Детерминант

$$D' = \begin{vmatrix} h_n^{n-1} & \ldots & h_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^0 & \ldots & h_1^0 \end{vmatrix}$$

удовлетворяет сравнению

$$D' \equiv \begin{vmatrix} y_n^{n-1} & \ldots & y_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^0 & \ldots & y_1^0 \end{vmatrix} \pmod{p^{l+1}}$$

и потому

$$p^\Theta \mid D', \quad p^{\Theta+1} \nmid D'.$$

Из (71) и (86) следует, что различным системам $(y_{n+1}, \ldots, y_s)$ соответствуют различные системы $(h_{n+1}, \ldots, h_s)$. Меняя $z_{n+1}, \ldots, z_s$, мы по одному решению $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ получим p^{s-n} решений $(h_1, h_2, \ldots, h_s)$; если при $\nu = 1, 2, \ldots, n$ мы получим из (86) $h_\nu > p^{l+1}$, то возьмем вместо h_ν его наименьший положительный вычет по модулю p^{l+1}.

Переходя к сравнениям по модулям $p^{l+2}, \ldots, p^{l+u}$, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

12. *При* $l \geqslant m, s \geqslant 2^{n^2-n-2} n^4$ *в случае выполнения условий* (81) *имеем*

$$W(p^l) \geqslant p^{(s-n)(l-m)}.$$

Действительно, так как согласно § 5 при $p > n$ имеем $m = 1$, то из §§ 7, 9 и 11 следует, что при $s \geqslant n^{\frac{n}{2}+3}$, $l \geqslant 1$

$$W_1(p^l) \geqslant p^{(s-n)(l-1)}.$$

В случае же $p \leqslant n$ из § 10 и § 11 вытекает, что при $s \geqslant 2^{n^2-n-2}n^4$, $l \geqslant m$

$$W_1(p^l) \geqslant p^{(s-n)(l-m)},$$

так как Θ представляет собою степень, в которой p входит в $(n-1)! \ldots 2!\,1!$ и, как нетрудно видеть, $\Theta < \frac{n^2-n-2}{2(p-1)}$,

$$p^{2\Theta+2\Theta_0+1} \leqslant n^3 \cdot p^{2\Theta} < n^3 \cdot p^{\frac{n^2-n-2}{p-1}} < n^3 \cdot 2^{n^2-n-2}.$$

Так как, очевидно,

$$W(p^l) \geqslant W_1(p^l),$$

то наше утверждение доказано.

13. *При* $s \geqslant 2^{n^2-n-2}n^4$ *и выполнении условий* (81)

$$\begin{vmatrix} N_n & \ldots & 1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ N_1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R, \ldots, \begin{vmatrix} n^n & \ldots & N_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ n & \ldots & N_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R,$$

где $R = n!\,(n-1)! \ldots 2!\,1!$, *имеем*

$$\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n) \geqslant C_1(n, s) > 0. \qquad (87)$$

Доказательство: следует из §§ 4 и 12.

14. Покажем теперь, что *условия* (81) *являются необходимыми для разрешимости системы диофантовых уравнений*

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k = N_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Действительно, пусть

$$N_k = \sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

тогда детерминант

$$D_n = \begin{vmatrix} N_n & (n-1)^n & \ldots & 1^n \\ N_{n-1} & (n-1)^{n-1} & \ldots & 1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_1 & n-1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

можно преобразовать следующим образом:

$$D_n = \begin{vmatrix} \sum x_\nu^n & (n-1)^n & \ldots & 3^n & 2^n & 1^n \\ \sum x_\nu^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \ldots & 3^{n-1} & 2^{n-1} & 1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum x_\nu^2 & (n-1)^2 & \ldots & 3^2 & 2^2 & 1^2 \\ \sum x_\nu & n-1 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)! \begin{vmatrix} \sum x_\nu^n & (n-1)^{n-1} & \dots & 3^{n-1} & 2^{n-1} & 1^{n-1} \\ \sum x_\nu^{n-1} & (n-1)^{n-2} & \dots & 3^{n-2} & 2^{n-2} & 1^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_\nu^2 & n-1 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \sum x_\nu & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1)! \begin{vmatrix} \sum (x_\nu^n - x_\nu^{n-1}), & (n-1)^{n-1}-(n-1)^{n-2} & \dots & 3^{n-1}-3^{n-2}, & 2^{n-1}-2^{n-2}, & 0 \\ \sum (x_\nu^{n-1} - x_\nu^{n-2}), & (n-1)^{n-2}-(n-1)^{n-3} & \dots & 3^{n-2}-3^{n-3}, & 2^{n-2}-2^{n-3}, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum (x_\nu^2 - x_\nu), & (n-1)-1, & \dots & 3-1, & 2-1, & 0 \\ \sum x_\nu, & 1, & \dots & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1)!\,(n-2)! \begin{vmatrix} \sum x_\nu^{n-1}(x_\nu-1) & (n-1)^{n-2} & \dots & 3^{n-2} & 2^{n-2} \\ \sum x_\nu^{n-2}(x_\nu-1) & (n-1)^{n-3} & \dots & 3^{n-3} & 2^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_\nu(x_\nu-1) & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(n-1)!\,(n-2)!\,(n-3)! \begin{vmatrix} \sum x_\nu^{n-2}(x_\nu-1)(x_\nu-2) & (n-1)^{n-3} & \dots & 3^{n-3} \\ \sum x_\nu^{n-3}(x_\nu-1)(x_\nu-2) & (n-1)^{n-4} & \dots & 3^{n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_\nu(x_\nu-1)(x_\nu-2) & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Продолжая эти преобразования, мы в конечном итоге получим

$$D_n = (n-1)!\ (n-2)!\ \dots\ 2!\,1! \sum x_\nu (x_\nu - 1)\ \dots\ (x_\nu - n + 1),$$

откуда следует, что

$$D_n \equiv 0 \pmod R.$$

Таким же путем убеждаемся в необходимости остальных условий (81).

15. Полученный нами результат относительно одновременного представления n чисел суммами первых, ..., n-ых степеней может быть приложен к рассмотрению систем диофантовых уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{s} f_1(x_\nu) &= M_1 \\ \dots&\dots \\ \sum_{\nu=1}^{s} f_n(x_\nu) &= M_n \end{aligned}\right\}, \qquad (88)$$

где

$$f_k(x) = a_{kn} x^n + \dots + a_{k2} x^2 + a_{k1} x \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

причем a_{kl} — целые неотрицательные числа.

Пусть

$$N_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_s^k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

тогда система (88) дает нам

$$a_{nn} N_n + \dots + a_{n1} N_1 = M_n ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{1n} N_n + \dots + a_{11} N_1 = M_1 .$$

Предполагая, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{nn} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{11} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, мы можем найти $N_1, \dots, N_n$ и узнать, выполняются ли при данных M_k и a_{kl} условия (81).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР.

Поступило
10. VII. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

1 Kamke E., Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes, Math Annalen, Bd. 83, 1921.
2 Виноградов И. М., Об одном классе совокупных диофантовых уравнений, Известия АН СССР, 1929.
3 Марджанишвили К., Об одновременном представлении двух чисел суммами полных m-ых и n-ых степеней, Доклады АН СССР, т. II, № 7, 1936.
4 Kamke E., Über die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in 1-te und n-te Potenzen, J. f. die reine und angew. Math., Bd. 152, 1923.
5 Виноградов И. М., Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена, Лемма III, Известия АН СССР, 1927.
6 Mordell L. J., On a sum analogous to a Gauss's sum, Quart. J. Math., Oxford, Ser. 3, 1932.

C. MARDJANICHVILI. SUR LA REPRÉSENTATION SIMULTANÉE DE n NOMBRES PAR DES SOMMES DES PUISSANCES COMPLÈTES

RÉSUMÉ

Soient $N_1, N_2, \dots, N_n$ n nombres naturels satisfaisant aux conditions suivantes:

$$N_n^{\frac{\nu}{n}} I_\nu \leqslant N_\nu \leqslant i_\nu s^{1-\frac{\nu}{n}} N_n^{\frac{\nu}{n}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1), \tag{1}$$

$I_1 > 1, \dots, I_{n-1} > 1, i_1 < 1, \dots, i_{n-1} < 1$ étant des constantes dont le choix dépend de n,

$$\begin{vmatrix} N_n & (n-1)^n & \dots & 1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_1 & n-1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{R}, \ \dots$$

$$\ldots, \begin{vmatrix} n^n & (n-1)^n & \ldots & N_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n-1 & \ldots & N_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod R, \qquad (2)$$

$$R = n!\,(n-1)!\,\ldots\,2!\,1!$$

Le système des équations diophantiques

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k = N_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

est résolvable si $s \geqslant 2^{n^2-n-2}n^4$, $n \geqslant 5$ et le nombre $I(N_1, \ldots, N_n)$ des solutions est représenté par la formule (si nous posons $N_\nu = h_\nu N_n^{\frac{\nu}{n}}$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$)

$$I(N_1, \ldots, N_n) =$$
$$= B_1(h_1, \ldots, h_{n-1}) N_n^{\frac{s}{n} - \frac{n+1}{2}} \left(\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n) + O\left(N_n^{-\frac{1}{4n}}\right)\right),$$

où

$$B(h_1, \ldots, h_{n-1}) \geqslant B_0(n, s),$$

$$\mathfrak{S} = \sum_{q_1, \ldots, q_{n-1}}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_n),$$

$$A(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n} D^s e^{-2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} N_1 + \ldots + \frac{a_n}{q_n} N_n\right)}$$

($a_1, \ldots, a_n$ parcourent des systèmes réduits résp. modulo $q_1, \ldots, q_n$),

$$D = \frac{1}{q_1, \ldots, q_n} \sum_{r=0}^{q_1, \ldots, q_{n-1}} e^{2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} r\right)}.$$

Les conditions (2) sont nécessaires pour la représentabilité de n nombres $N_1, \ldots, N_n$ par des sommes des puissances 1-ères, 2-es, ..., n-mes complètes. Quant à ce qui concerne les conditions (1), remarquons que si $x_1, x_2, \ldots, x_s$ sont des nombres réels nonnegatifs on a

$$\left(\sum_{k=1}^{s} x_k^n\right)^{\frac{\nu}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{s} x_\nu^k \leqslant s^{1-\frac{\nu}{n}} \left(\sum_{k=1}^{s} x_k^n\right)^{\frac{\nu}{n}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

et par suite il est nécessaire qu'on ait

$$N_\nu^{\frac{\nu}{n}} \leqslant N_\nu \leqslant s^{1-\frac{\nu}{n}} N_n^{\frac{\nu}{n}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

СОДЕРЖАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СЕРИИ ЗА 1937 ГОД
TABLE DES MATIÈRES DE LA SÉRIE MATHÉMATIQUE 1937

Nr. 1

Nr. 2

Nr. 4

Авторы статей этого выпуска и их адреса

Les auteurs des articles de ce fascicule et leurs adresses

Бернштейн, Сергей Натанович, В. О., 10 линия, д. 25, кв. 26, Ленинград.
S. Bernstein, V. O., 10-ème ligne, 25, app. 26, Léningrad.

Соболев, Сергей Львович, Б. Полянка, д. 4/6, кв. 18, Москва.
S. Soboleff, Bolchaya Polianka, 4/6, app. 18, Moscou.

Келдыш, Мстислав Всеволодович, Бакунинская ул., д. 4/6, кв. 64, Москва.
M. Keldych, rue Bakuninskaya, 4/6, app. 64, Moscou.

Лаврентьев, Михаил Алексеевич, Машков пер., д. 1а, кв. 24, Москва.
M. Lavrentieff, Machkoff péréoulok, 1a, app. 24, Moscou.

Александров, Александр Данилович, ул. Грота, 1/3, кв. 43, Ленинград (22).
A. Alexandroff, rue Grot, 1/3, app. 43, Léningrad (22).

Марджанишвили, Константин Константинович, Шоссе Энтузиастов, д. 109/а, кв. 242, Москва.
K. Mardjanichvili, chaussé Entousiastoff, 109/a, app. 242, Moscou.

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 67, тел. В3-47-38.
Adresse de la rédaction: B. Kalouiskaya, 67, Moscou.

Оглавление

Sommaire

Редактор серии **В. А. Толстиков** Технический редактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 23/IX 1937 г. Подписано к печати 17/II 1938 г. Формат 72×108 см. $10^1/_2$ печ. л.+2 вклейки. 45.760 зн. в печ. л.

Уполн. Главлита Б-36135. Тираж 2350 экз. Заказ 1479. АНИ № 764

16-я типография треста «Полиграфкнига». Москва, Трехпрудный пер., 9